Работы молодых ученых

УДК 550.348

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА РАДОНА (^{222}Rn) В СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ И ЕГО СТОКА В ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

© 2008 Р.И. Паровик[1,2]

[1]*Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Камчатский край, 684034; e-mail: romano84@mail.ru*
[2]*Камчатский государственный университет им. В. Беринга, Петропавловск-Камчатский, 683032*

Предложена модель стока радона из пород с фрактальными свойствами в приземный слой атмосферы. Рассмотрены режимы супердиффузии и аномальной адвекции. Получены аналитические решения. Проведено их сравнение с результатами классической модели. Обсуждаются особенности смены режимов массопереноса.
Ключевые слова: радон, аномальная диффузия, фрактальная среда, моделирование, атмосфера.

ВВЕДЕНИЕ

Радон (^{222}Rn) является эффективным индикатором на напряженно-деформированное состояние геосреды, а его перенос – одним из геодинамических процессов, происходящих в земной коре. Кроме того, радон – хороший ионизатор и поэтому оказывает влияние на проводимость воздуха и формирование электрического поля приземной атмосферы.

Изучением переноса радона в геологических средах занимаются сравнительно давно (Граммаков и др., 1957). Такие исследования проводились, как правило, для разведки урановых руд. При этом были разработаны математические модели, которые легли в основу теории радонового (эманационного) метода поиска полезных ископаемых (Булашевич, Хайретдинов, 1959; Граммаков и др., 1957; Новиков, Капков, 1965). Однако эти модели строились в предположении о том, что перенос радона осуществляется за счет процессов обычной диффузии в однородных пористых средах. Так, например, в рамках этого подхода была рассмотрена задача стока радона в атмосферу (Паровик и др., 2006, 2007).

Но пористые среды обладают, как правило, фрактальными свойствами, наличие которых приводит к процессам аномальной диффузии или адвекции. Целью данной работы является построение математической модели переноса радона в таких средах.

В настоящее время по многим направлениям развивается математическое моделирование массопереноса в средах, имеющих фрактальную структуру (Крылов, Бобров, 2004; Москалев, Шитов, 2007; Тарасевич, 2002). Например, в работе (Сербина, 2007) рассмотрены фрактальные модели переноса влаги в водоносных системах, в работе (Нахушева, 2006) разработаны одномерные модели фильтрации в средах с фрактальной структурой, в работах (Большов и др., 2002; Драников, 2007) созданы модели фрактального выноса радионуклидов в атмосферу из хранилищ радиоактивных отходов, а в работе (Потапов, 2005) рассмотрены модели фрактального турбулентного переноса в атмосфере. Как правило, механизмом переноса в этих моделях является аномальная диффузия, которая может приводить к увеличению стока вещества в атмосферу в случае супердиффузии или к его уменьшению в режиме субдиффузии.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА РАДОНА В ЕСТЕСТВЕННЫХ СРЕДАХ

Математическая модель обычной диффузии радона. Перенос радона в однородной пористой среде без фрактальных свойств описывается уравнением обычной диффузии и адвекции (Граммаков и др., 1957; Новиков, Капков, 1965):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \lambda u(x,t) + Q/\eta\,, \quad (1)$$

где D – коэффициент молекулярной диффузии радона в поровой среде, *м²/с*; Q – интенсивность объемных источников, *кБк/м³с*; $u(x)$ – поровая активность радона, *кБк/м³*; η – коэффициент пористости среды, $0<\eta<1$ (в атмосфере $\eta=1$); v – скорость адвекции в порах, *м/с*; λ – постоянная распада радона, $1/c$. Поры предполагаются открытыми, т. е. соединенными между собой, что обеспечивает диффузию.

Соотношение (1) следует из уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = -\lambda u(x,t) + Q/\eta\,, \quad (2)$$

и закона Фика:

$$q(x,t) = -D\eta\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + v\eta u(x,t)\,. \quad (3)$$

Скорость адвекции в порах представима в виде: $v = \overline{v} + \delta v$, где первое слагаемое – среднее значение скорости, а второе – ее флуктуации. В случае отсутствия регулярной адвекции, которая обычно связана с эффузией или конвекцией, $\overline{v} = 0$. В случае стохастической адвекции усреднение по случайному полю скоростей δv приводит к диффузионному уравнению (1) для средней концентрации радона, но с другим коэффициентом D, который зависит от интенсивности флуктуаций скорости δv (Кляцкин, 2005; Уткин, 2005[1]). Эффекты, связанные с перечисленными типами адвекции, рассматриваться не будут.

Уравнение переноса радона в приземный слой атмосферы (1) в стационарном случае можно представить в виде:

$$\begin{aligned} &D_1\frac{d^2u_1}{dx^2} - \lambda u_1(x) + Q/\eta = 0, \quad x>0\,, \\ &D_2\frac{d^2u_2}{dx^2} - \lambda u_2(x) = 0, \quad x<0\,, \end{aligned} \quad (4)$$

где D_1 и D_2 – коэффициенты диффузии в грунте и атмосфере.

Предполагаем, что на границе двух сред (x=0) выполняются условия непрерывности концентрации и потока радона:

$$\begin{aligned} &u(x)\big|_{x=0+0} = u(x)\big|_{x=0-0}\,, \\ &D_1\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=0+0} = D_2\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=0-0}\,, \end{aligned} \quad (5)$$

а на внешних границах сред – краевые условия:

$$\begin{aligned} &u \to u_0 = \frac{Q}{\lambda\eta}, \quad x\to\infty\,, \\ &u \to 0, \quad x \to -\infty\,. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение задачи (4-6) , можно получить с помощью интегрального преобразования Лапласа и записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} &u(x) = u_0\left[1 - \frac{l_a\exp(-x/l_g)}{(l_a+l_g)}\right], \quad x>0 \\ &u(x) = u_0\left[1 - \frac{l_a}{(l_a+l_g)}\right]\exp(x/l_a), \quad x<0\,, \end{aligned} \quad (7)$$

где $l_g = \sqrt{D_1/\lambda}$ – длина диффузии радона в грунте, $l_a = \sqrt{D_2/\lambda}$ – длина диффузии радона в приземном слое атмосферы.

Модель переноса радона в среде с фрактальными свойствами. Если среда, в которой происходит перенос радона, обладает фрактальными свойствами, то тогда обобщенный закон Фика будет выглядеть следующим образом (Учайкин, 2003):

$$q(x,t) = -D\eta\frac{\partial^{\alpha-1}u(x,t)}{\partial x^{\alpha-1}}\,, \quad (8)$$

где показатель дробности производной α, зависящий от хаусдорфовой размерности фрактала (Кобелев, 2001), может меняться в пределах $0<\alpha<2$. Интервал $1<\alpha<2$ соответствует аномальной диффузии, $\alpha=1$ – обычному переносу, а $0<\alpha<1$ – аномальной адвекции.

Надо отметить, что соотношение (8) может иметь и другую форму записи, учитывающую асимметрию производной относительно точки x, см., например, (Учайкин, 2003; Metzler, Klafter, 2000; Zaslavsky, 2002). Это обобщение рассматриваться не будет.

При учете нелокальных эффектов по времени выражение (8) имеет более сложный вид (Учайкин, 2003):

$$q(x,t) = -D\eta\frac{\partial^{1-\beta}}{\partial t^{1-\beta}}\frac{\partial^{\alpha-1}u(x,t)}{\partial x^{\alpha-1}}\,,$$

где β – показатель дробности производной по времени, меняется в пределах $0<\beta<1$. Нелокальность по времени зависимости $q(x,t)$ от $u(x,t)$ связывают с прилипанием диффундирующих атомов к стенкам пор. Эти эффекты здесь рассматриваться не будут.

С учетом (2) и (8) уравнение диффузии радона во фрактальной среде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} - \lambda u(x,t) + Q/\eta\,. \quad (9)$$

При значении $\alpha=2$ осуществляется переход к уравнению обычной диффузии (1). Ниже будем

[1] *Уткин С.Г.* Статистика и кинематика аномально-диффузионных процессов. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород: НГУ, 2005. 127 с.

рассматривать стационарный процесс стока радона из грунта в приземный слой атмосферы, полагая в (9) $\partial u(x,t)/\partial t = 0$.

Рассмотрим стационарную диффузию радона в среде с фрактальными свойствами. В этом случае уравнение (9) запишется в виде:

$$D_1 d_{0x}^{\alpha} u(x) - \lambda u(x) + Q/\eta = 0, \quad x > 0,$$
$$D_2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \lambda u(x) = 0, \quad x < 0. \tag{10}$$

А вместо граничных условий (5) и будем иметь (Нахушев, 2003; Псху, 2005):

$$\lim_{x \to 0+0} d_{0x}^{\alpha-2} u(x) = u(x)\big|_{x=0-0},$$
$$D_1 \lim_{x \to 0+0} d_{0x}^{\alpha-1} u(x) = D_2 \left.\frac{du(x)}{dx}\right|_{x=0-0}, \tag{11}$$

где d_{0x}^{α} – оператор Римана-Лиувилля производной дробного порядка α (1<α<2), который действует по следующему правилу (Kilbas et al., 2006):

$$d_{0x}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{u(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-1}}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Краевые условия (6) останутся без изменения. Решение модели (6, 10, 11) можно записать в терминах функции типа Миттаг-Леффлера (Джрбашян, 1966):

$$u(x) = u_0 \left[1 + \frac{\mu^{1-1/\alpha}\left(\sigma x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mu x^{\alpha})\right)}{\mu^{1/\alpha} + \sigma}\right] +$$
$$+ \frac{u_0 \mu^{1-1/\alpha} x^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(\mu x^{\alpha})}{\mu^{1/\alpha} + \sigma} -$$
$$- u_0 E_{\alpha}(\mu x^{\alpha}), \quad x > 0, \tag{12}$$
$$u(x) = \frac{u_0 \mu^{1-1/\alpha} \exp(x/l_a)}{\mu^{1/\alpha} + \sigma}, \quad x < 0$$

где $E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / \Gamma(\alpha k + 1)$ – специальная функция Миттаг-Леффлера, а $E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / \Gamma(\alpha k + \beta)$ – специальная функция типа Миттаг-Леффлера, $\mu = \lambda / D_1$, $\sigma = \lambda l_a / D_1$.

Можно проверить, что при значении α=2 и с учетом соотношений $E_{2,1}(\mu x^2) = \mathrm{ch}(\sqrt{\mu} x)$ и $E_{2,2}(\mu x^2) = \mathrm{sh}(\sqrt{\mu} x) / \sqrt{\mu} x$, выражения (12) переходят в решения (7).

В случае $0 < \alpha < 1$ меняется тип уравнения в грунте, что соответствует переходу супердиффузии в аномальную адвекцию. При этом параметр D_1 будет играть роль скорости переноса.

Решение уравнения (10) будут иметь вид:

$$u(x) = A x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mu x^{\alpha}) +$$
$$+ u_0 \left[1 - E_{\alpha}(\mu x^{\alpha})\right], \quad x > 0, \tag{13}$$
$$u(x) = A \exp(x/l_a), \quad x < 0,$$

где константа A находится из единственного в этом случае граничного условия $\lim_{x \to 0+0} d_{0x}^{\alpha-1} u(x) = u(x)\big|_{x=0-0}$. Оно дает $A = u_0 \mu^{1-1/\alpha}$.

Поэтому решение (13) окончательно запишется так:

$$u(x) = u_0 \left[1 + \mu^{1-1/\alpha} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\mu x^{\alpha})\right] -$$
$$- u_0 E_{\alpha}(\mu x^{\alpha}), \quad x > 0, \tag{14}$$
$$u(x) = u_0 \mu^{1-1/\alpha} \exp(x/l_a), \quad x < 0.$$

При значении $\alpha = 1$ решения (12) и (14) перейдут в константу $u(x) = u_0$. Это означает, что происходит обычный перенос радона со скоростью D_1.

Отметим, что в случае $0 < \alpha < 1$ в обобщенном законе Фика (8) поток радона выражается через его концентрацию с помощью оператора дробного интегрирования, а не дифференцирования, степень которого также связана с фрактальной размерностью среды (Кобелев, 2001; Сербина, 2007). Однако в этом случае в уравнении (9) появляется дополнительный фактор, влияющий на изменение концентрации радона. Действительно, если рассмотреть предельный случай и положить $\alpha = 0$, то получим отсутствие переноса и рост или уменьшение концентрации радона в зависимости от соотношения параметров D_1 и λ.

Таким образом, случай $0 < \alpha < 1$ описывает не только процесс переноса, но еще и дополнительное выделение радона в поровое пространство из поровых фрактальных структур.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛЬНЫХ РАСЧЕТОВ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНЫХ СРЕД

Коэффициент диффузии D_1 зависит от заполнения пор, а D_2 – от турбулентности в атмосфере. Оба параметра могут меняться в пределах нескольких порядков (Новиков, Капков, 1965), но есть сопоставимые их значения, когда поры заполнены воздухом, а атмосфера неподвижна. Чтобы не получалось сильных градиентов концентрации радона вблизи границы радела сред, используем при численном моделировании сопоставимые значения D_1 и D_2. Значения параметров для численного расчета брались следующие (Новиков, Капков, 1965): $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6}$ 1/с,

$D_1 = 5.5 \cdot 10^{-7}$ м^2/с, $4 \cdot 10^{-7}$ м^2/с, $Q = 2.1 \cdot 10^{-6}$ 1/м^{3}с.

Расчетные кривые построены относительно нормированных координат по пространству и по концентрации радона. В первом случае нормировка осуществлялась на длину диффузии l_g в грунте, а во втором – на значение величины u_0.

В случае супердифузии ($1 < \alpha < 2$) вблизи границы раздела сред распределения радона располагаются между кривыми $\alpha = 2$ и 1 (рис. 1). Первая из них соответствует обычной диффузии, а вторая – такой же адвекции. Однако вглубь среды линии перегруппировываются в обратный порядок и с уменьшением α расчетные кривые затягиваются, а это означает, что длина диффузии увеличивается, и радон легче проникает через пористый грунт.

Вычисления показывают, что в случае аномальной адвекции ($0 < \alpha < 1$) радон еще интенсивнее, чем при супердиффузии, выносится из фрактальной среде и концентрируется вблизи границы с атмосферой (рис. 2). Данное накопление концентрации радона является следствием анизотропии геосреды (Кляцкин, 2005; Zaslavsky, 2002). Анизотропия геосреды связана с разуплотнением (дилатансией) пород, которое возникает в результате их разрушения. А это значит, что аномальная адвекция может объяснить выбросы радона в периоды сильных деформационных возмущений. Величина локального максимума определяется соотношением коэффициентов D_1 и D_2.

Аномальную адвекцию, как отмечалось выше, можно объяснить переносом, сопровождающимся выделением радона из поровых фрактальных структур в поровое пространство. Однако каковы свойства этих структур, как они зависят от состояния среды, и каким образом размерность фрактала связана с показателем дробности производной в уравнении переноса – эти вопросы требуют отдельных исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием аппарата теории дробного дифференциального исчисления построена модель стока радона из пород с фрактальными свойствами в приземный слой атмосферы. Рассмотрены стационарные режимы супердиффузии и аномальной адвекции. Найдены аналитические решения и получены пространственные

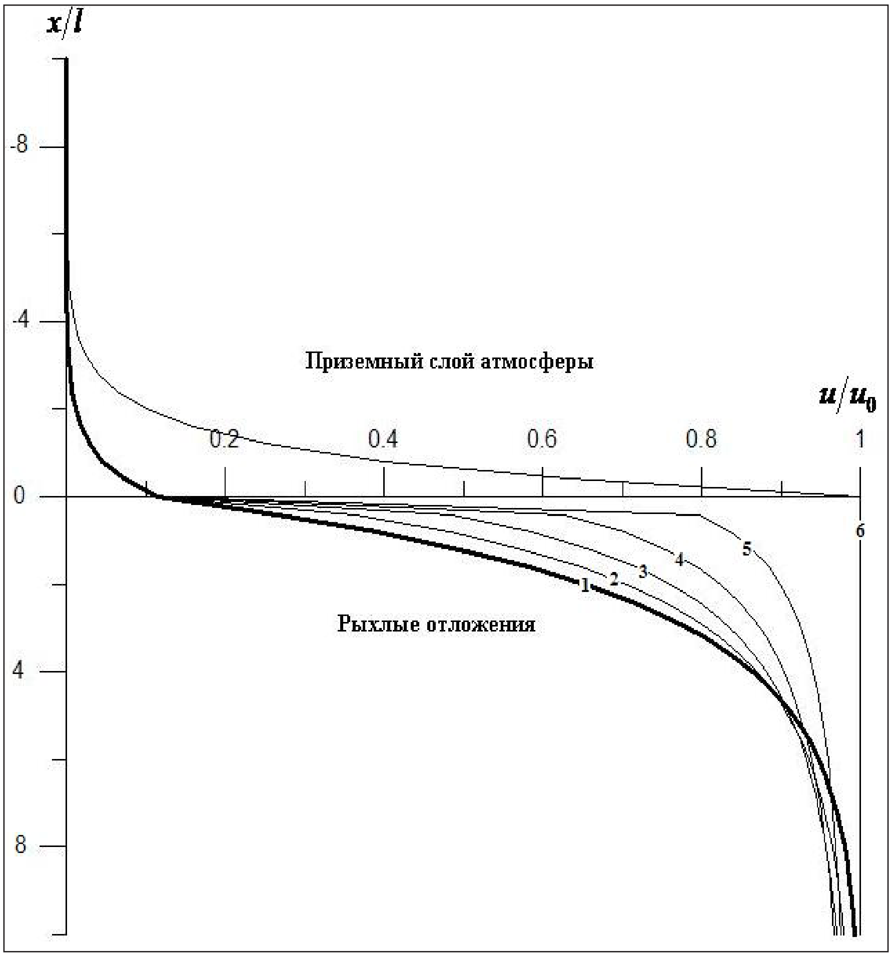

Рис. 1. Кривые концентрации радона в грунте и атмосфере в зависимости от параметра α: 2 (1); 1.8 (2); 1.6 (3); 1.4 (4); 1.2 (5); 1 (6).

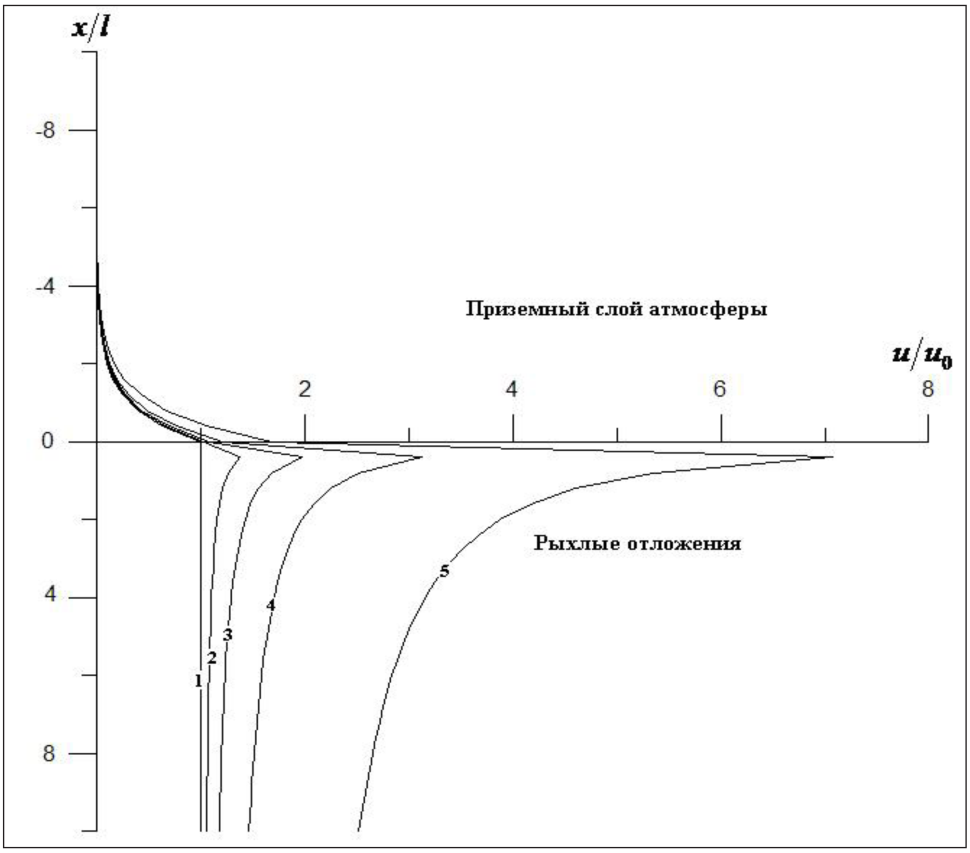

Рис. 2. Кривые распределения концентрации радона в грунте и атмосфере в зависимости от параметра α: 1 (1); 0.8 (2); 0.6 (3); 0.4 (4); 0.2 (5).

распределения концентрации радона в грунте и атмосфере. Исследованы особенности переноса радона в зависимости от показателя дробности. Показано, как при значениях $\alpha = 1$ происходит смена режимов транспорта радона.

Благодарность. Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. Б.М. Шевцову за конструктивное обсуждение полученных результатов и ценные замечания, которые послужили их лучшему осмыслению.

Список литературы

Большов Л.А., Дыхне А.М., Кондратенко Т.С. Аномальная диффузия и флуктуационные эффекты в сильно неупорядоченных средах // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 75. Вып. 5/6. С. 291-293.

Булашевич Ю.П., Хайретдинов Р.К. К теории диффузии эманации в пористых средах. // Известия АН СССР. Сер. геофизическая. 1959. № 12. С. 1787 – 1792.

Граммаков А.Г., Никонов А.И., Тарфеев Г.П. Радиометрические методы поисков и разведки урановых руд. М.: Госгеолтехиздат, 1957. 610 с.

Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Драников И.Л. Аномальная диффузия в простых физических моделях: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: ИПБРАЭ, 2007. 25 с.

Кляцкин В.И. Диффузия и кластеризация пассивной примеси в случайных гидродинамических потоках. М.: Физматлит, 2005. 160 с.

Кобелев Я.Л. Феноменологические методы описания больших систем с фрактальными структурами: Афтореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: УрГУ, 2001. 24 с.

Крылов С.С., Бобров Н.Ю. Фракталы в геофизике. СПб.: Издательство С-Пб. университета, 2004. 138 с.

Москалев П.В., Шитов В.В. Математическое моделирование пористых структур. М.: Физматлит, 2007. 120 с.

Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.

Новиков Г.Ф., Капков Ю.Н. Радиоактивные методы разведки. М.: Недра, 1965. 750 с.

Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Модель массопереноса радона (ОА ^{222}Rn) в приземном слое атмосферы // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2006 № 2. Вып. 8. С. 128-133.

Паровик Р.И., Ильин И.А., Фирстов П.П. Обобщенная одномерная модель массопереноса радона ^{222}Rn и его эксхаляция в приземный слой атмосферы // Математическое моделирование. 2007. № 11. Т. 19. С. 43-50.

Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.

Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.

Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. М: Едиториал УРСС, 2002. 112 с.

Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. № 8. С. 847-876.

Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 с.

Metzler R., Klafter J. The random walk`s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. T. 339. 2000. P. 1-77.

Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Physics Reports. T. 371. 2002. P. 461–580.

MODELING PROCESSES A RADON TRANSFER IN FRACTIONAL STRUCTURE MEDIUM AND IT DRAIN IN THE SURFACE LAYER OF THE ATMOSPHERE

R.I. Parovik[1,2]

[1]*Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Paratunka, Kamchatka Edge, 684034*
[2]*Kamchatka Vitus Bering State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, 683032*

The model of flowing the radon from rocks with fractional properties in the atmosphere near the surface is offered. The modes of superdiffusion and anomalous advection are considered. They analytical decisions are received and are compared with results the classical model. Peculiarities of changing the modes transfer are discussed.