

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ОДНОМЕРНЫХ КУСОЧНО-ГРАДИЕНТНЫХ СРЕДАХ

© 2020 П.Н. Александров<sup>1</sup>, О.Б. Забинякова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Центр геоэлектромагнитных исследований ИФЗ РАН (ЦГЭМИ ИФЗ РАН), Москва, Троицк, Россия, 108840; e-mail: alexandr@igemi.troitsk.ru

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научная станция Российской академии наук в г. Бишкеке, Бишкек, Киргизия, 720049; e-mail: perah.92@inbox.ru

Получено решение прямых задач магнитотеллурического зондирования для случая одномерных кусочно-градиентных сред. Рассматриваются две задачи: задача вычисления импеданса на дневной поверхности для градиентной модели верхнего полупространства (атмосферы Земли) и задача определения магнитотеллурического импеданса для слоистых, кусочно-градиентных моделей геологической среды, которые позволяют проводить математическое моделирование магнитотеллурических функций отклика и исследовать взаимодействие электромагнитного поля и градиентных моделей сред литосферы. Такие модели расширяют возможности развития теории и практики магнитотеллурических исследований, прежде всего при решении обратных задач, что связано с преимуществом аналитических решений перед численными решениями обратных задач геофизики в плане резкого уменьшения их размерности. Основной акцент в работе сделан на исследование геодинамических процессов в рамках пассивного электромагнитного мониторинга, основы которого заложены в статье (Александров, Рыбин, Забинякова, 2018).

*Ключевые слова:* магнитотеллурический метод, плоское электромагнитное поле, градиентные среды.

### ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени хорошо исследованы прямые задачи магнитотеллурического зондирования (МТЗ) для горизонтально-слоистых, кусочно-постоянных (Тихонов, 1950), изотропных и анизотропных, в том числе и бианизотропных, сред (Александров, 2001). Однако удельная электропроводность среды может меняться непрерывно. Для некоторых таких сред известны аналитические решения прямых задач МТЗ, которые приведены в книге (Verdichevsky, Dmitriev, 2002). Следуя указанной работе, под градиентной средой будем понимать непрерывную зависимость электропроводности от вертикальной координаты  $z$  в декартовой системе координат  $Oxyz$ . Такая модель актуальна для описания распределения удельной электропроводности в атмосфере Земли, где она увеличивается с высотой по экспоненциальному закону. Однако в приповерхностном слое толщиной около одного километра, удельная электро-

проводность является постоянной величиной (Глобальная... , 2019). Как следует из работы (Александров, Рыбин, Забинякова, 2018), для изучения внешних (экзогенных) источников магнитотеллурического поля требуется знание импеданса верхнего полупространства (атмосферы). Эта информация необходима для изучения анизотропии электропроводности в нижнем полупространстве, поскольку анизотропия электропроводности геологической среды проявляется при разном направлении внешних (сторонних) источников, находящихся в верхнем полупространстве. Непосредственное определение импеданса атмосферы по наблюдаемым данным не представляется возможным. Однако знание распределения электропроводности в атмосфере позволяет рассчитать этот импеданс. Отсюда следует необходимость решения прямой задачи МТЗ для двухслойной среды, где первый слой описывается постоянной электропроводностью, а второй слой характеризуется градиентной, экспоненциально возрастающей функцией

высоты. Основой для решения таких задач являются известные решения дифференциальных уравнений с аналитически заданными коэффициентами, изложенные, например, в справочнике (Зайцев, Полянин, 2001), что позволяет применить их на случай решения прямых задач для кусочно-градиентных моделей геологической среды.

### ВЫЧИСЛЕНИЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ИМПЕДАНСА АТМОСФЕРЫ

В случае плоской электромагнитной волны, падающей вертикально на горизонтально однородную среду, уравнения Максвелла в декартовой системе координат  $Oxuz$  принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} H_y = -\sigma E_x; \\ \frac{\partial}{\partial z} E_x = -i\omega\mu H_y; \end{cases} \quad (1)$$

где  $E_x(z)$  —  $x$ -вая компонента вектора напряженности электрического поля,  $H_y(z)$  —  $y$ -вая компонента вектора напряженности магнитного поля,  $\omega$  — частота,  $\mu$  — магнитная проницаемость (здесь и далее она принимается равной магнитной проницаемости вакуума  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м),  $\sigma = \sigma(z)$  — удельная электропроводность, которая в настоящей работе описывается экспоненциальной функцией пространственной координаты  $z$ ,  $i = \sqrt{-1}$  — комплексная единица. Вертикальная ось  $z$ , направлена вверх (при решении прямой задачи для атмосферы).

Система (1), соответствующая одномерному случаю системы уравнений Максвелла, получается из полной системы уравнений Максвелла с помощью преобразования Фурье и стандартных упрощающих предположений (подробно описанных, например, в (Berdichevsky, Dmitriev, 2002)). Обратим внимание, что в данной работе подразумевается использование отрицательного знака в факторе экспоненты в преобразовании Фурье. Такой выбор связан с тем, что от него зависит вид уравнения Бесселя, к которому может быть сведена система (1) при рассмотрении экспоненциальной зависимости для функции удельной электропроводности. В этом случае решениями уравнения Бесселя являются модифицированные функции Бесселя (а не просто функции Бесселя), что, по мнению авторов, является более удобным (но не принципиальным) при решении прямой задачи МТЗ для кусочно-градиентных сред.

Систему уравнений Максвелла первого порядка (1) можно свести к дифференциальному уравнению Гельмгольца второго порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x - i\omega\mu_0\sigma E_x = 0$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x - k^2 E_x = 0,$$

где  $k = k(z) = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma(z)}$ ,  $\text{Re}(k) > 0$  — волновое число среды.

Рассмотрим зависимость электропроводности от пространственной координаты  $z$  в виде  $\sigma(z) = \sigma_0 e^{pz}$ , где  $\sigma_0$  и  $p$  — некоторые действительные числа. Тогда ранее введенное волновое число

будет определяться формулой  $k_0 = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_0} e^{\frac{p}{2}z}$ .

Заменяя в уравнении Гельмгольца переменную

$z$  на  $\zeta = \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}$ , получим уравнение Бесселя:

$$\zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} E_x + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} E_x - \zeta^2 E_x = 0,$$

решениями которого являются линейно независимые модифицированные функции Бесселя  $I_0(\zeta)$  и  $K_0(\zeta)$  (Корн, Корн 1974). Тогда общее решение для напряженности электрического поля будет иметь вид:

$$E_x(z) = C_1 \cdot I_0\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right) + C_2 \cdot K_0\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right). \quad (2.1)$$

Следовательно, учитывая второе уравнение системы (1), получим общее решение для напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned} H_y(z) &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x = \\ &= -\frac{k_0}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p}{2}z} \left[ C_1 \cdot I_1\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right) - C_2 \cdot K_1\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — комплексные произвольные постоянные.

В зависимости от значения  $p$  при  $z \rightarrow +\infty$  модифицированные функции Бесселя обладают следующими свойствами:

$$I_0\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right) = \begin{cases} I_0\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right) \rightarrow \infty, & \text{if } p > 0; \\ e^{k_0 z} \rightarrow \infty, & \text{if } p = 0; \\ I_0\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right) \rightarrow 1, & \text{if } p < 0; \end{cases}$$

$$K_0\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right) = \begin{cases} K_0\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right) \rightarrow 0, & \text{if } p > 0; \\ e^{-k_0 z} \rightarrow 0, & \text{if } p = 0; \\ K_0\left(\frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z}\right) \rightarrow \infty, & \text{if } p < 0; \end{cases}$$

$$I_1\left(\frac{2k_0}{p}e^{\frac{p}{2}z}\right) = \begin{cases} I_1\left(\frac{2k_0}{p}e^{\frac{p}{2}z}\right) \rightarrow \infty, \text{ и } \delta \text{ è } p > 0; \\ e^{k_0z} \rightarrow \infty, \text{ и } \delta \text{ è } p = 0; \\ I_1\left(\frac{2k_0}{p}e^{\frac{p}{2}z}\right) \rightarrow -0, \text{ и } \delta \text{ è } p < 0; \end{cases}$$

$$K_1\left(\frac{2k_0}{p}e^{\frac{p}{2}z}\right) = \begin{cases} K_1\left(\frac{2k_0}{p}e^{\frac{p}{2}z}\right) \rightarrow 0, \text{ и } \delta \text{ è } p > 0; \\ e^{-k_0z} \rightarrow 0, \text{ и } \delta \text{ è } p = 0; \\ K_1\left(\frac{2k_0}{p}e^{\frac{p}{2}z}\right) \rightarrow -\infty, \text{ и } \delta \text{ è } p < 0. \end{cases}$$

Для моделирования магнитотеллурического импеданса в атмосфере будем использовать двухслойную модель среды, в которой первый слой мощностью  $h$  характеризуется постоянной величиной удельной электропроводности, а удельная электропроводность второго, градиентного, слоя является экспоненциальной функцией  $\sigma(z) = \sigma_0 e^{pz}$  (так называемая экспоненциальная модель Вайдельта (Weidelt, 1972).

Получим выражения для вычисления магнитотеллурического импеданса на подошве верхнего слоя, находящейся на высоте  $h$ , руководствуясь (Verdichevsky, Dmitriev, 2002). Рассмотрим следующие случаи:

– при  $p > 0$ ,  $z \rightarrow +\infty$  произвольная постоянная  $C_1 = 0$  (условие убывания поля на бесконечности), а значит, уравнения (2.1) и (2.2) примут вид:

$$E_x(z) = C_2 K_0 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right), \quad H_y(z) = C_2 \frac{k_0}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p}{2}z} K_1 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right).$$

Следовательно, импеданс определяется формулой:

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)} = \frac{K_0 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right)}{\frac{k_0}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p}{2}z} K_1 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right)} =$$

$$= \frac{i\omega\mu_0}{k_0} e^{-\frac{p}{2}z} \frac{K_0 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right)}{K_1 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right)},$$

которая на подошве градиентного полупространства примет вид:

$$\tilde{Z} = \frac{i\omega\mu_0}{k_0} \frac{K_0 \left( \frac{2k_0}{p} \right)}{K_1 \left( \frac{2k_0}{p} \right)}. \quad (3.1)$$

– при  $p = 0$ ,  $z \rightarrow +\infty$  произвольная постоянная  $C_1 = 0$  (условие убывания поля на бесконечности), а значит, уравнения (2.1) и (2.2) примут вид:

$$E_x(z) = C_2 e^{-k_0z}, \quad H_y(z) = C_2 \frac{k_0 e^{-k_0z}}{i\omega\mu_0}.$$

Следовательно,

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)} = \tilde{Z} = \frac{i\omega\mu_0}{k_0}. \quad (3.2)$$

– при  $p < 0$ ,  $z \rightarrow +\infty$  произвольная постоянная  $C_2 = 0$  (условие убывания поля на бесконечности), а значит, уравнения (2.1) и (2.2) примут вид:

$$E_x(z) = C_1 \cdot I_0 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right), \quad H_y(z) = -\frac{k_0}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p}{2}z} C_1 \cdot I_1 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right).$$

Следовательно, импеданс определяется формулой:

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)} = -\frac{i\omega\mu_0}{k_0} e^{-\frac{p}{2}z} \frac{I_0 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right)}{I_1 \left( \frac{2k_0}{p} e^{\frac{p}{2}z} \right)},$$

которая на подошве градиентного полупространства примет вид:

$$\tilde{Z} = -\frac{i\omega\mu_0}{k_0} \frac{I_0 \left( \frac{2k_0}{p} \right)}{I_1 \left( \frac{2k_0}{p} \right)}. \quad (3.3)$$

При решении прямой одномерной задачи МТЗ для атмосферы будем использовать результат, полученный для  $p > 0$  (то есть формулу (3.1)) — такой выбор  $p$  наилучшим образом соответствует реальной модели атмосферы (Глобальная... , 2019). Обратим внимание, что все формулы (3.1), (3.2) и (3.3), соответствующие разным значениям  $p$  будут использоваться при решении второй задачи для моделирования магнитотеллурического импеданса в кусочно-градиентной среде нижнего полупространства.

Для первого слоя с постоянной электропроводностью  $\sigma(z) = const$  решение системы уравнений (1) имеет вид:

$$\begin{cases} E_x(z) = e^{kz} C_1 + e^{-kz} C_2, \\ H_y(z) = -\frac{k}{i\omega\mu_0} (e^{kz} C_1 - e^{-kz} C_2). \end{cases}$$

Разрешим эту систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C_1$ ,  $C_2$  при  $z = 0$ . Получим:

$$C_1 = \frac{\Delta_{C_1}}{\Delta} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\Delta_{C_2}}{\Delta},$$

где  $\Delta = \frac{2k}{i\omega\mu_0}$ ,  $\Delta_{C_1} = \frac{k}{i\omega\mu_0} E_x(0) - H_y(0)$  и  $\Delta_{C_2} = H_y(0) + \frac{k}{i\omega\mu_0} E_x(0)$ ,

а  $E_x(0)$  и  $H_y(0)$  — напряженности электрического и магнитного полей на дневной поверхности земли ( $z = 0$ ). А значит, внутри первого слоя, в том числе и на его кровле, магнитотеллурический импеданс может вычисляться по формуле:

$$Z(z) = \frac{E_x(z)}{H_y(z)} = \frac{e^{kz}C_1 + e^{-kz}C_2}{-\frac{k}{i\omega\mu_0}(e^{kz}C_1 - e^{-kz}C_2)} = \frac{e^{kz}\Delta_{C_1} + e^{-kz}\Delta_{C_2}}{-\frac{k}{i\omega\mu_0}(e^{kz}\Delta_{C_1} - e^{-kz}\Delta_{C_2})} = -\frac{i\omega\mu_0}{k} \frac{k \operatorname{ch}(kz)Z(0) - i\omega\mu_0 \operatorname{sh}(kz)}{k \operatorname{sh}(kz)Z(0) - i\omega\mu_0 \operatorname{ch}(kz)}, \quad (4)$$

где  $Z(0)$  — магнитотеллурический импеданс на дневной поверхности, удовлетворяющий уравнению  $E_x(0) = Z(0)H_y(0)$ .

Учитывая, что импеданс является непрерывной функцией при переходе через границу двух слоев с разными значениями электропроводности, и, полагая  $z = h$ , приравняем правые части уравнений (3.1) и (4):

$$\frac{i\omega\mu_0}{k_0} \frac{K_0 \left( \frac{2k_0}{p} \right)}{K_1 \left( \frac{2k_0}{p} \right)} = -\frac{i\omega\mu_0}{k} \frac{k \operatorname{ch}(kh)Z(0) - i\omega\mu_0 \operatorname{sh}(kh)}{k \operatorname{sh}(kh)Z(0) - i\omega\mu_0 \operatorname{ch}(kh)},$$

и из полученного равенства найдем выражение для магнитотеллурического импеданса верхнего полупространства:

$$Z(0) = \frac{i\omega\mu_0}{k} \frac{\operatorname{sh}(kh) + \frac{k}{k_0} \operatorname{ch}(kh) \frac{K_0 \left( \frac{2k_0}{p} \right)}{K_1 \left( \frac{2k_0}{p} \right)}}{\operatorname{ch}(kh) + \frac{k}{k_0} \operatorname{sh}(kh) \frac{K_0 \left( \frac{2k_0}{p} \right)}{K_1 \left( \frac{2k_0}{p} \right)}}. \quad (5)$$

Магнитотеллурический импеданс является комплекснозначной функцией, поэтому можно анализировать её действительную и мнимую части по отдельности или вычислять модуль комплексных значений импеданса, либо кажущееся сопротивление  $\rho_k(\omega) = \frac{|Z(\omega, 0)|^2}{\omega\mu_0}$  и фазу

импеданса  $\varphi(\omega) = \operatorname{Arg}(Z(\omega, 0))$  (Berdichevsky, Dmitriev, 2002), которые мы и будем использовать в дальнейшем при отображении результатов, получаемых для тестовых задач.

При выполнении численных экспериментов будем использовать частотный диапазон  $\{\omega_j\}_1^{100}$ , представляющий собой геометрическую прогрессию с первым членом  $\omega_1 = 10^{-3}$  и знаменателем 1.2 (которые были выбраны произвольно). Выражение (5) позволяет определять точное значение магнитотеллурического импеданса на поверхности Земли для любой частоты  $\omega$ .

Рассмотрим пример. Удельная электропроводность воздуха вблизи дневной поверхности на высотах до 1 км составляет в среднем  $\sigma = 10^{-14}$  См/м, в верхнем слое электропровод-

ность экспоненциально возрастает с показателем  $p \approx 1.6702 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$  (что обеспечивает рост электропроводности в атмосфере, близкий к реальному). На рисунке 1 в графическом виде представлена вышеописанная модель электропроводности атмосферы.

На рисунке 2 представлены кривые кажущегося сопротивления и фазы импеданса, полученные для этой модели.

Рассмотрим другой пример. Не исключено, что на границе раздела слоев удельная электропроводность может меняться скачком, например,  $\sigma_0 = 2\sigma$ . На рисунке 3 в графическом виде представлена такая модель электропроводности атмосферы.

На рисунке 4 представлены кривые кажущегося сопротивления и фазы импеданса, полученные для этой модели атмосферы.

Таким образом, найдено аналитическое решение прямой задачи по вычислению импеданса атмосферы. Эти решения могут быть обобщены на случай кусочно-градиентных сред в задаче магнитотеллурического зондирования геологической среды. Основой решения таких задач являются известные аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями пространственных координат (Зайцев, Полянин, 2001). Это позволяет находить решения в аналитическом виде на некотором заданном отрезке, и, таким образом, связывать поля на подошве и кровле градиентного слоя. В дальнейшем будем считать, что на общей

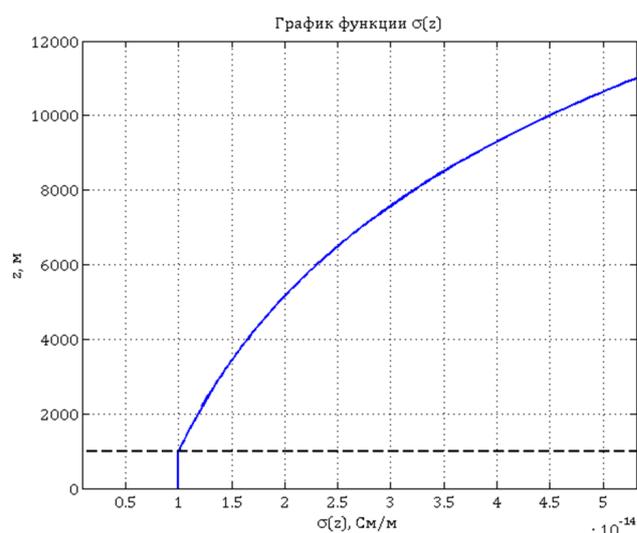
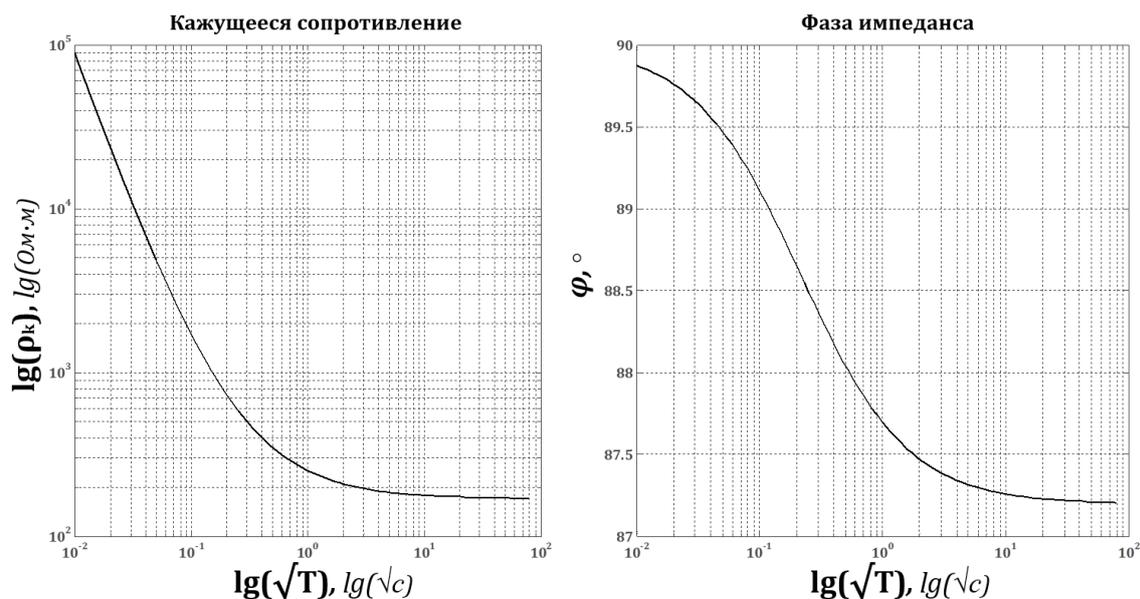
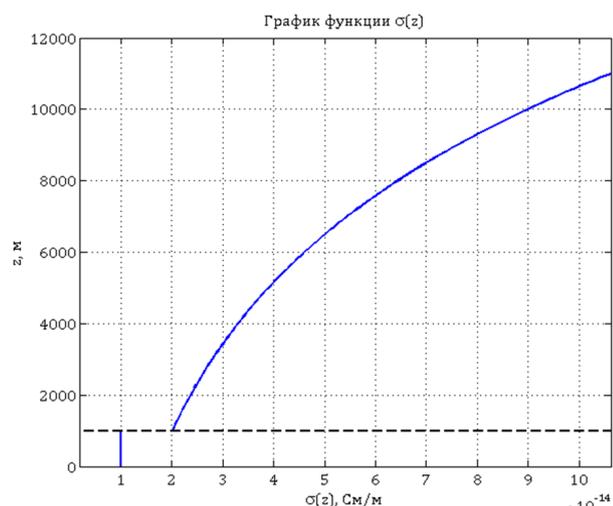


Рис. 1. Модель электропроводности атмосферы. Горизонтальная прерывистая линия — граница между нижним слоем с постоянной электропроводностью и верхним градиентным слоем.

Fig. 1. Conductivity model of the atmosphere. Horizontal dashed line — the boundary between the lower layer with constant electrical conductivity and the upper gradient layer.



**Рис. 2.** Кривые кажущегося сопротивления  $\rho_k$  и фазы импеданса  $\varphi$  для тестовой модели атмосферы.  
**Fig. 2.** Curves of apparent resistivity  $\rho_k$  and impedance phase  $\varphi$  for the atmosphere test model.



**Рис. 3.** Модель электропроводности атмосферы со скачком электропроводности. Горизонтальная прерывистая линия — граница между слоем с постоянной электропроводностью и верхним градиентным слоем.

**Fig. 3.** Conductivity model of the atmosphere with a jump in electrical conductivity. Horizontal dashed line — the boundary between the layer with constant electrical conductivity and the upper gradient layer.

границе двух слоев возможна не только смена функциональной зависимости электропроводности от глубины, но и скачок электропроводности. Основная идея решения прямой задачи в этом случае заключается в продолжении магнитотеллурического импеданса (который является непрерывным при переходе через границу раздела слоев с разными градиентными зависимостями электропроводности) с подошвы последнего слоя нижнего полупространства на дневную поверхность. Далее, для конкретности,

рассмотрим описанную задачу для слоистой модели геологической среды, где в каждом слое электропроводность описывается экспоненциальной зависимостью от вертикальной координаты  $z$ .

### ВЫЧИСЛЕНИЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ИМПЕДАНСА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ КУСОЧНО-ГРАДИЕНТНОЙ МОДЕЛИ СРЕДЫ

Итак, рассмотрим кусочно-градиентную  $N$ -слойную модель геоэлектрической среды, в которой для каждого  $n$ -ого слоя  $z_n \leq z < z_{n+1}$ ,  $n = 1, \dots, N$  ( $z_1 = 0$ ,  $z_{N+1} = \infty$ ) с кровлей, залегающей на глубине  $z_n$ , и подошвой, залегающей на глубине  $z_{n+1}$ , задана непрерывная функция удельной электрической проводимости;  $\sigma_n(z) = \sigma_n^0 e^{p_n z}$   
 $k_n = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_n^0}$ ,  $\text{Re}(k_n) > 0$  — волновое число  $n$ -ого слоя.

Уточним ранее рассмотренные решения (2.1) и (2.2) в контексте  $n$ -го слоя такой модели. На подошве этого слоя (при  $z = z_{n+1}$ ) с удельной электропроводностью  $\sigma_n(z) = \sigma_n^0 e^{p_n z}$ ,  $p_n \neq 0$  функции электрической и магнитной напряженностей примут вид:

$$\begin{cases} E_x(z_{n+1}) = C_n^1 \cdot I_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2} z_{n+1}} \right) + C_n^2 \cdot K_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2} z_{n+1}} \right); \\ H_y(z_{n+1}) = -\frac{k_n}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p_n}{2} z_{n+1}} \left[ C_n^1 \cdot I_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2} z_{n+1}} \right) - C_n^2 \cdot K_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2} z_{n+1}} \right) \right]. \end{cases} \quad (6)$$

где  $k_n = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_n^0}$ .

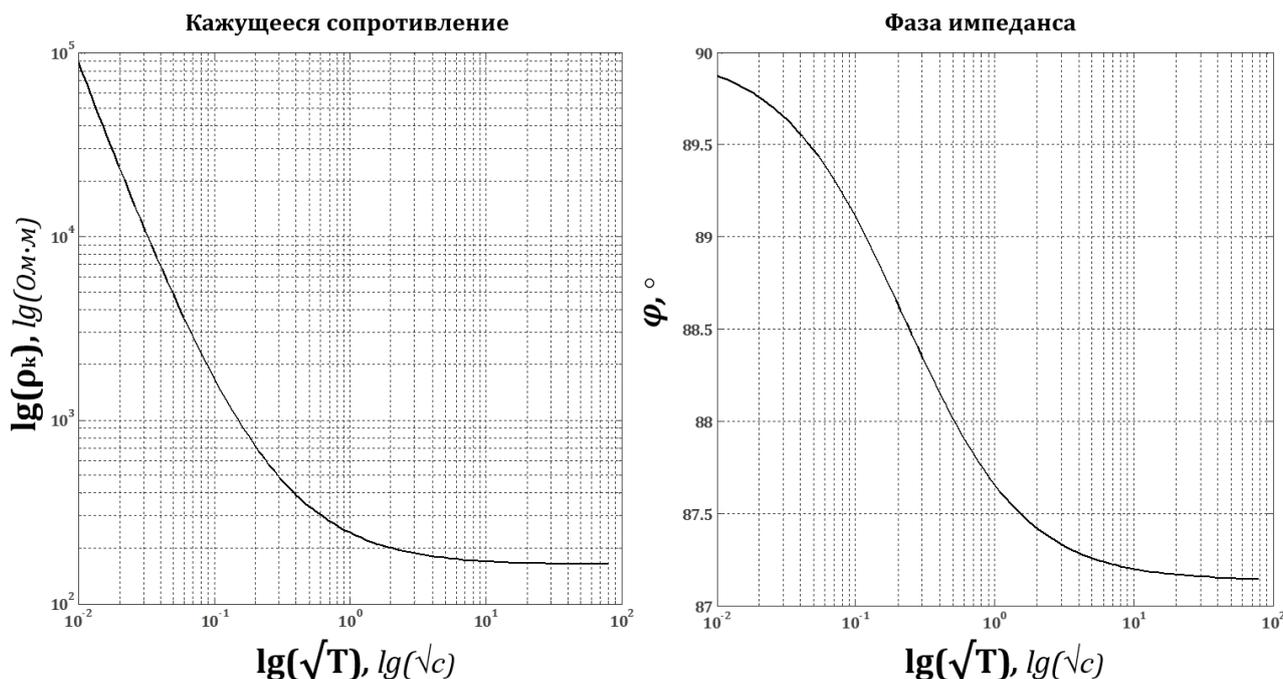


Рис. 4. Кривые кажущегося сопротивления  $\rho_k$  и фазы импеданса  $\varphi$  для тестовой модели атмосферы со скачком электропроводности.

Fig. 4. Curves of apparent resistivity  $\rho_k$  and impedance phase  $\varphi$  for the test model of atmosphere with a jump in electrical conductivity.

Найдем неизвестные коэффициенты  $C_n^1$  и  $C_n^2$  из системы линейных алгебраических уравнений (6):

$$C_n^1 = \frac{\Delta_{C_n^1}}{\Delta} \text{ и } C_n^2 = \frac{\Delta_{C_n^2}}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \frac{k_n}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} I_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) K_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) + \frac{k_n}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} I_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) K_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right),$$

$$\Delta_{C_n^1} = \frac{k_n}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} K_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) E_x(z_{n+1}) -$$

$$- K_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) H_y(z_{n+1}),$$

$$\Delta_{C_n^2} = \frac{k_n}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} I_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) E_x(z_{n+1}) +$$

$$+ I_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) H_y(z_{n+1})$$

Рассмотрим отношение коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_n = \frac{C_n^1}{C_n^2} = \frac{\Delta_{C_n^1}}{\Delta_{C_n^2}} =$$

$$\frac{\frac{k_n}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} K_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) E_x(z_{n+1}) - K_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) H_y(z_{n+1})}{\frac{k_n}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} I_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) E_x(z_{n+1}) + I_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) H_y(z_{n+1})}$$

или

$$C_n = \frac{k_n e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} K_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) Z(z_{n+1}) - i\omega\mu_0 K_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right)}{k_n e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} I_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right) Z(z_{n+1}) + i\omega\mu_0 I_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_{n+1}} \right)} \quad (7)$$

$$\text{где } Z(z_{n+1}) = \frac{E_x(z_{n+1})}{H_y(z_{n+1})}.$$

Таким образом, величина  $C_n$  связана со значением импеданса на подошве  $n$ -го градиентного слоя.

На кровле  $n$ -го слоя ( $z = z_n$ ), согласно выражениям (2.1) и (2.2), формулы для определения электромагнитного поля будут иметь вид:

$$\begin{cases} E_x(z_n) = C_n^1 \cdot I_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \right) + C_n^2 \cdot K_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \right); \\ H_y(z_n) = -\frac{k_n}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \left[ C_n^1 \cdot I_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \right) - C_n^2 \cdot K_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \right) \right]. \end{cases}$$

Из последних равенств следует, что:

$$Z(z_n) = \frac{E_x(z_n)}{H_y(z_n)} = \frac{C_n \cdot I_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \right) + K_0 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \right)}{-\frac{k_n}{i\omega\mu_0} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \left[ C_n \cdot I_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \right) - K_1 \left( \frac{2k_n}{p_n} e^{\frac{p_n}{2}z_n} \right) \right]} \quad (8)$$

где коэффициент  $C_n$  определяется по формуле (7).

Соотношение (8) позволяет определять значение импеданса на кровле  $n$ -го слоя, если значение импеданса на подошве этого слоя известно. При  $p_n = 0$  вместо формулы (8) будем использовать формулу, аналогичную (4):

$$Z(z_n) = -\frac{i\omega\mu_0}{k_n} \frac{Z(z_{n+1}) - \frac{i\omega\mu_0}{k_n} \text{th}[k_n(z_n - z_{n+1})]}{\text{th}[k_n(z_n - z_{n+1})] Z(z_{n+1}) - \frac{i\omega\mu_0}{k_n}}$$

Таким образом, предварительно определив значение магнитотеллурического импеданса на кровле последнего слоя бесконечной мощности по одной из формул (3.1), (3.2) и (3.3), можно продолжить его и на другие слои, вплоть до дневной поверхности, используя рекурсию (8) последовательно для  $n = N-1, N-2, \dots, 1$ .

Рассмотрим результаты вычисления импеданса по описанному выше алгоритму для некоторых тестовых моделей.

Параметры первой тестовой модели представлены в таблице 1, а рисунок 5 иллюстрирует распределение удельной электропроводности для этой модели.

Таблица 1. Тестовая модель 1.

Table 1. Test model 1.

№ слоя	Удельная электропроводность слоя $\sigma(z) = \sigma_0 e^{pz}$ , См/м		Мощность, м
	$\sigma_0$	p	
1	$10^{-2}$	0	1000
2	$10^{-1}$	$\ln 10 \cdot 10^{-3}$	$\infty$

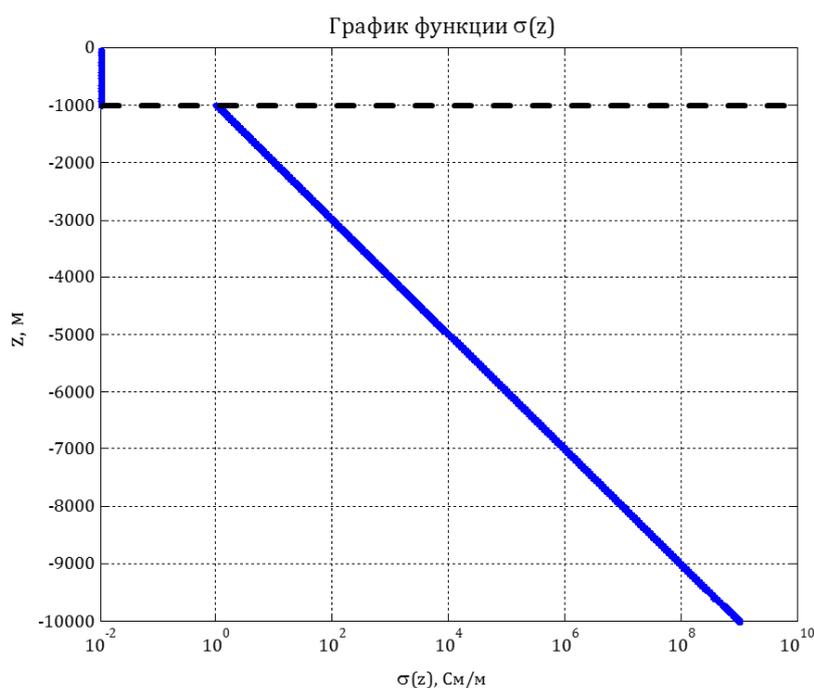


Рис. 5. График функции удельной электропроводности для тестовой модели 1. Горизонтальная прерывистая линия — граница между слоями.

Fig. 5. The graph of the electrical conductivity function for the test model 1. Horizontal dashed line — the boundary between layers.

Кривые кажущегося сопротивления и фазы импеданса, полученные для тестовой модели 1, представлены на рисунке 6.

Параметры второй тестовой модели представлены в таблице 2, а рисунок 7 иллюстрирует распределение удельной электрической проводимости для этой модели.

Кривые кажущегося сопротивления и фазы импеданса, полученные для тестовой модели 2, представлены на рисунке 8.

Параметры третьей тестовой модели представлены в таблице 3, а рисунок 9 иллюстрирует распределение удельной электрической проводимости для этой модели.

Кривые кажущегося сопротивления и фазы импеданса, полученные для тестовой модели 3, представлены на рисунке 10.

Из результатов, представленных выше, следует, что градиентный слой не проявляется явным, специфическим образом на магнитотеллурических кривых. То есть определение критериев наличия такого слоя в модели в перспективе может стать отдельной исследовательской задачей.

Таким образом, переход к магнитотеллурическому импедансу, в силу его непрерывности, позволяет продолжать поле через слоисто-градиентную среду. Это продолжение на дневную поверхность приводит к получению импеданса на поверхности Земли для случая кусочно-градиентных сред на примере экспоненциальной зависимости электропроводности от вертикальной координаты. При этом слой с постоянной величиной электропроводности является частным случаем градиентной среды.

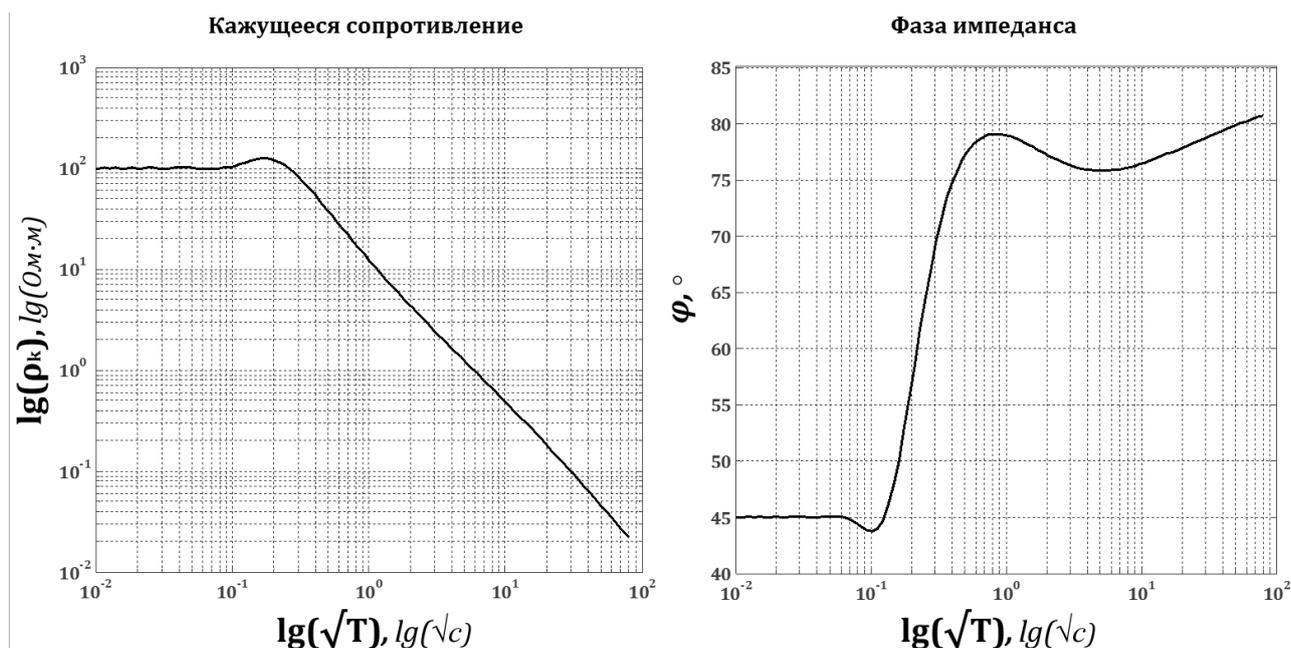


Рис. 6. Кривые кажущегося сопротивления  $\rho_k$  и фазы импеданса  $\varphi$  для тестовой модели 1.

Fig. 6. Curves of apparent resistivity  $\rho_k$  and impedance phase  $\varphi$  for the test model 1.

Таблица 2. Тестовая модель 2.

Table 2. Test model 2.

№ слоя	Удельная электропроводность слоя $\sigma(z) = \sigma_0 e^{pz}$ , См/м		Мощность, м
	$\sigma_0$	p	
1	$10^{-4}$	0	1000
2	$10^{-3}$	0	2000
3	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$\infty$

### ВЫВОДЫ

Используемые в настоящей статье модели градиентных сред могут быть обобщены на случай более сложных моделей, основываясь на исследованных и полученных решениях дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Отсутствие таких моделей в геофизических исследованиях ограничивает развитие теории и практики магнитотеллурических исследований.

Аналитические решения дифференциальных уравнений с переменными коэффици-

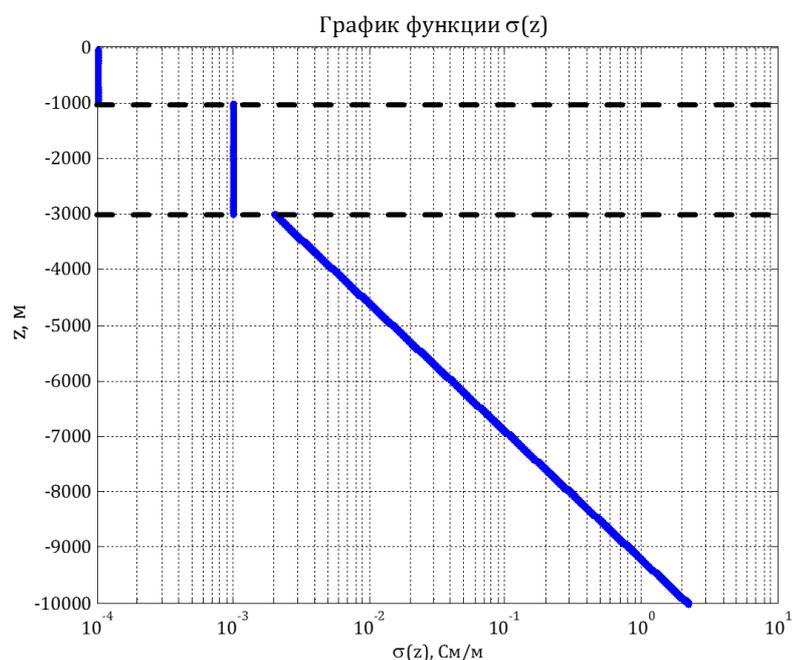


Рис. 7. График функции удельной электропроводности для тестовой модели 2. Горизонтальные прерывистые линии — границы между слоями.

Fig. 7. The graph of the electrical conductivity function for the test model 2. Horizontal dashed lines — the boundaries between layers.

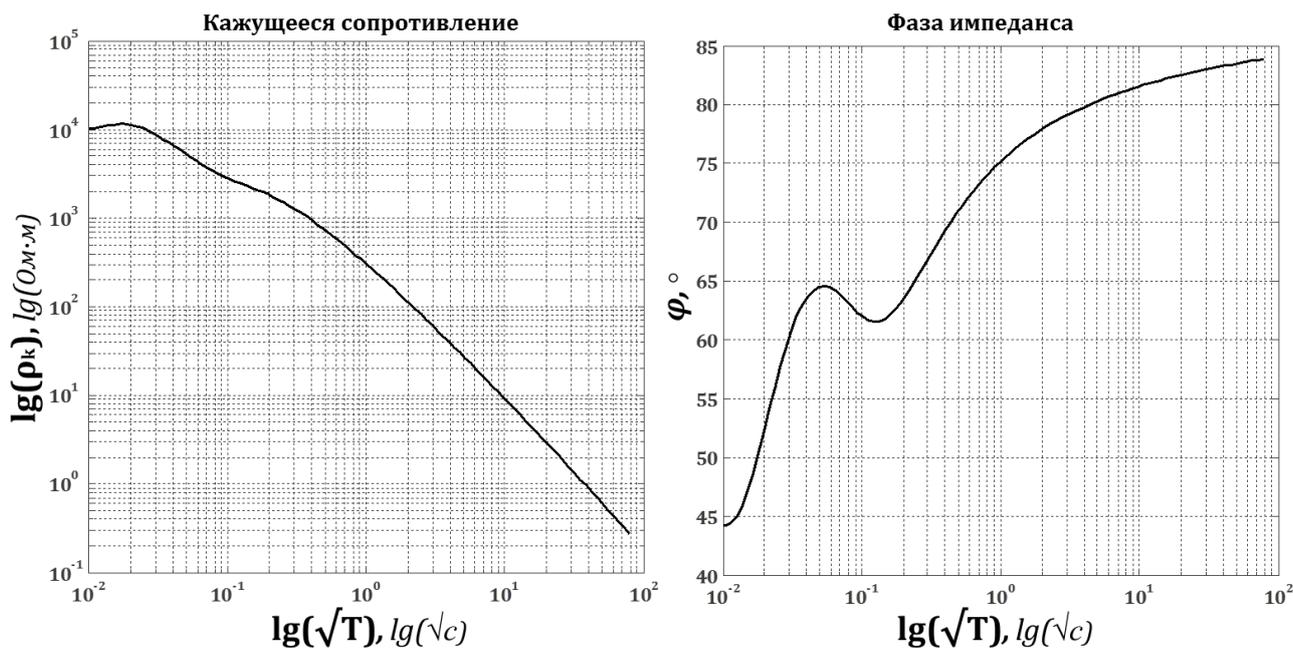


Рис. 8. Кривые кажущегося сопротивления  $\rho_k$  и фазы импеданса  $\varphi$  для тестовой модели 2.

Fig. 8. Curves of apparent resistivity  $\rho_k$  and impedance phase  $\varphi$  for the test model 2.

Таблица 3. Тестовая модель 3.

Table 3. Test model 3.

№ слоя	Удельная электропроводность слоя $\sigma(z) = \sigma_0 e^{pz}$ , См/м		Мощность, м
	$\sigma_0$	p	
1	$10^{-3}$	0	1000
2	$4 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3}$	2000
3	$6 \cdot 10^{-3}$	$-10^{-4}$	$\infty$

циентами имеют огромные преимущества перед численными решениями обратных задач геофизики в плане резкого уменьшения их размерности.

Практическая значимость аналитических решений заключается в расширении класса моделей геоэлектрики, описывающих как атмосферу, так и литосферу Земли на случай кусочно-градиентных сред.

Представленные в работе результаты получены в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 20-05-00475.

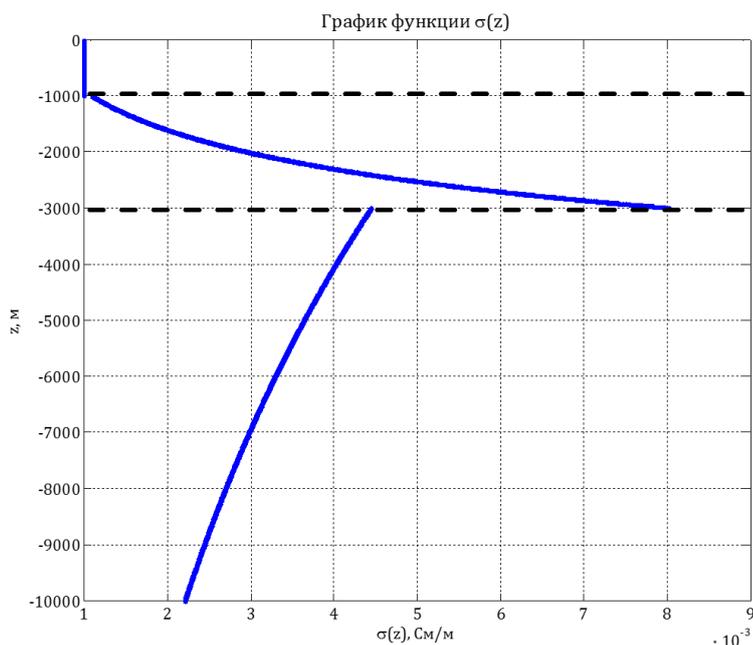


Рис. 9. График функции удельной электропроводности для тестовой модели 3. Горизонтальные прерывистые линии — границы между слоями.

Fig. 9. The graph of the electrical conductivity function for the test model 3. Horizontal dashed lines — the boundaries between layers.

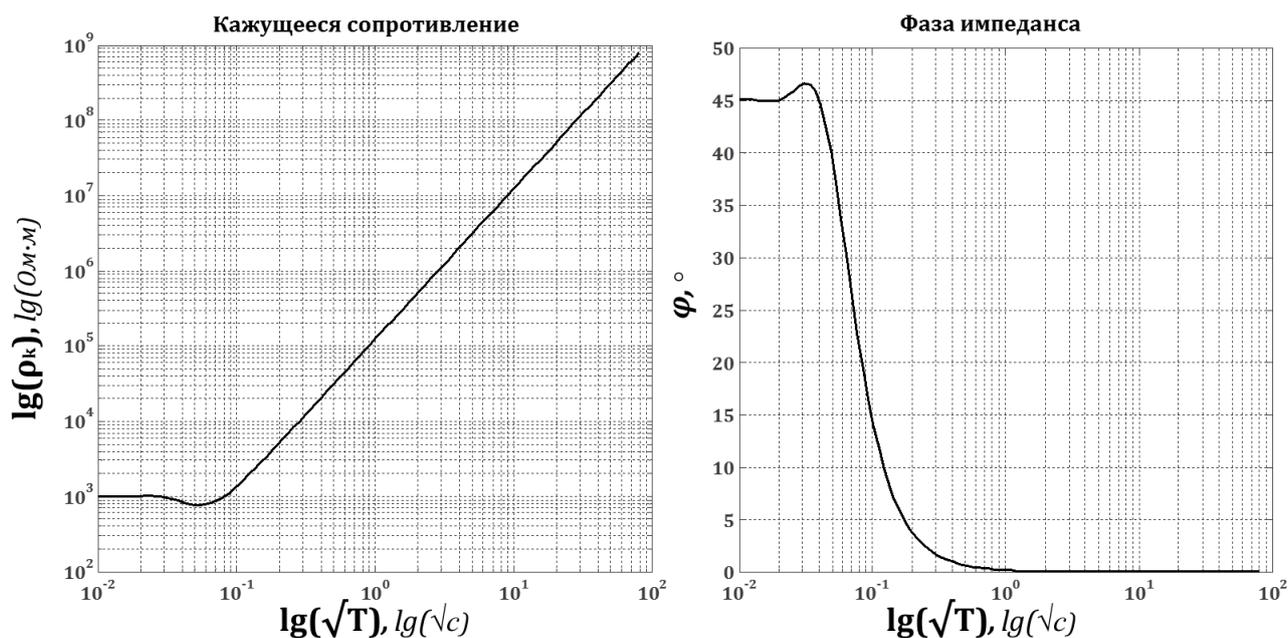


Рис. 10. Кривые кажущегося сопротивления  $\rho_k$  и фазы импеданса  $\varphi$  для тестовой модели 3.

Fig. 10. Curves of apparent resistivity  $\rho_k$  and impedance phase  $\varphi$  for the test model 3.

#### Список литературы [References]

- Александров П.Н. Прямая задача геоэлектрики в одномерных бианизотропных средах // Физика Земли. 2001. № 4. С. 51–61 [Alexandrov P.N. The direct problem of geoelectrics in one-dimensional bianisotropic medium // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. 2001. № 4. P. 51–61 (in Russian)].
- Александров П.Н., Рыбин А.К., Забиякова О.Б. Разделение электромагнитного поля по положению источников в магнитотеллурическом методе // Ученые записки Казанского университета. Серия Естественные науки. 2018. Т. 160. № 2. С. 339–351 [Alexandrov P.N., Rybin A.K., Zabinyakova O.B. The separation of the electromagnetic field at the position of the sources in the magnetotelluric method // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Estestvennye Nauki. 2018. V. 160. № 2. P. 339–351 (in Russian)].
- Глобальная электрическая цепь: материалы четвертой Всероссийской конференции / Отв. ред. С.В. Анисимов. Ярославль: Филигрань, 2019. 112 с. [Global'naya elektricheskaya ser': materialy chetvertoj Vserossijskoj konferencii / Отв. red. S. V. Anisimov. YAroslavl': Filigran', 2019. 112 p. (in Russian)].
- Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с. [Zaitsev V.F., Polyinin A.D. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam. M.: Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian)].
- Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 832 с. [Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike (dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov). M.: Nauka, 1974. 832 p. (in Russian)].
- Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с. [Spravochnik po special'nym funkciyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami / Pod red. Abramovica M. i Stigan I. M.: Nauka, 1979. 832 p. (in Russian)].
- Тихонов А.Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // ДАН. 1950. Т. 73. № 2. С. 295–297 [Tikhonov A.N. On determining electrical characteristics of the deep layers of the Earth's crust // Doklady Earth Sciences. 1950. V. 73. P. 295–297 (in Russian)].
- Berdichevsky M.N., Dmitriev V.I. Magnetotellurics in the context of the theory of ill-posed problems. Tulsa: SEG, 2002. 215 p. <https://doi.org/10.1190/1.9781560802068>.
- Weidelt P. The Inverse Problem of Geomagnetic Induction // Zeitschrift fur Geophysik. 1972. Band 38. Heft 2. P. 257–290.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
**MATHEMATICAL MODELING OF MAGNETOTELLURIC FIELD  
IN ONE-DIMENSIONAL PIECEWISE GRADIENT MEDIUM**

**P.N. Alexandrov<sup>1</sup>, O.B. Zabinyakova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Geoelectromagnetic Research Center of the Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Troitsk, Russia*

<sup>2</sup>*Research Station of the Russian Academy of Sciences, Bishkek, Kyrgyz Republic*

The solution of forward problems of magnetotelluric sounding for a case of one-dimensional piecewise gradient environments is received. Two problems are considered: the problem of calculating the impedance on the Earth's surface for a gradient model of the upper half-space (Earth's atmosphere) and the problem of determining the magnetotelluric impedance for layered, piecewise-gradient models of the geological medium, which allow mathematical modeling of the magnetotelluric response functions and study the interaction of electromagnetic field and gradient models of lithosphere media. Such models extend the possibilities of development of the theory and practice of magnetotelluric research, first of all, when solving inverse problems, which is associated with the advantage of analytical solutions over numerical solutions of inverse problems of geophysics in terms of sharp reduction of their dimensionality. The main focus of the work is on the study of geodynamic processes in passive electromagnetic monitoring, the foundations of which are laid in the article (Alexandrov, Rybin, Zabinyakova, 2018).

*Keywords: magnetotellurics, plane electromagnetic field, gradient media.*

Поступила в редакцию 01.04.2020 г.

После доработки 23.07.2020 г.

Принята в печать 26.07.2020 г.