

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОГО ПОДХОДА В ТЕОРИИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

© 2022 П.И. Балк¹, А.С. Долгаль²

¹Берлин, Германия

²Горный институт Уральского отделения РАН, Пермь, Россия, 614007; e-mail: dolgal@mi-perm.ru

Поступила в редакцию 13.10.2022 г.; после доработки 30.11.2022 г.; принята к публикации 26.12.2022 г.

В силу дискретности измерений гравитационных и магнитных полей в математической теории интерпретации первостепенное значение приобретают конечноэлементные модели среды, обладающие универсальными возможностями в вопросах учета разнообразной априорной информации. Известные методы решения обратных задач для конечноэлементных моделей источников поля можно разбить на два класса — первый, где результатом интерпретации традиционно является единичное решение, оптимальное по некоторому критерию, и второй, где в результатах интерпретации находит отражение репрезентативное подмножество допустимых решений обратной задачи, что повышает их достоверность. Разработки авторов настоящей статьи для методов второго класса оформились в гарантированный подход и аддитивные технологии интерпретации геопотенциальных полей. Предлагаемый обзор имеет целью продвижение методов второго класса в практику интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, что должно способствовать более полному извлечению информации из геофизических данных.

Ключевые слова: конечноэлементный подход, гарантированный подход, аддитивные технологии, гравиразведка, магниторазведка.

ВВЕДЕНИЕ

Конечноэлементный подход к прямым и обратным задачам гравиразведки и магниторазведки, как и методы их решения в рамках этого подхода, получили свое название от модельных классов источников поля, в которых носителями Ω этих источников (называемыми конфигурациями) служат всевозможные объединения элементов V_j некоторого замощения изучаемой пространственной области D , физические характеристики (плотность, намагниченность) которых постоянны. Если за характерный признак взять представление носителя суммой «простых» тел, то у конечноэлементного подхода окажется много общего с аппроксимационным подходом (в одном случае возмущающее тело «погружается» в замощение, в другом — замощение налагается на тело). Кроме того, в литературе конечноэлементные модели получили различные названия (призматические, дискретные, ячеистые), так что де-факто такие модели среды

и сам подход лежат в основе большего числа известных методов решения обратных задач, чем может показаться на первый взгляд. В концептуальном плане рассматриваемые методы решения прямых и обратных задач гравиразведки и магниторазведки близки к широко известному методу конечных элементов (Галлагер, 1984), но развивались независимо от него, опираясь на собственные ресурсы, прежде всего, на потенциальный характер изучаемого поля.

Ростки конечноэлементного подхода в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий долгое время не привлекали широкого внимания. Ситуация кардинально изменилась на рубеже XX и XXI вв. Подход был признан ведущими специалистами как одно из важнейших направлений в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий (Страхов, 2001; Страхов и др., 2000). Так, рассуждая об актуальных направлениях развития теории интерпретации потенциальных полей, В.Н. Страхов (2001) поставил проблему

дальнейшего изучения конечноэлементного подхода в один ряд с созданием специализированного искусственного интеллекта и разработкой теории некорректных задач, полностью адекватной геофизической практике. Немногим ранее в работе (Страхов и др., 2000) было выделено четыре основных направления развития теории интерпретации геофизических данных, в числе которых помимо метода интегральных представлений была указана «очень важная» проблема совершенствования конечноэлементного подхода. Столь высокая оценка была в немалой степени связана с наметившимся поворотом к более информативным технологиям количественной интерпретации, отвечающим девизу тех лет и актуальному поныне: создание теории интерпретации гравитационных и магнитных полей, полностью отвечающей реалиям геофизической практики. Отличительная черта новых технологий состоит в необходимости построения не одного (наилучшего) варианта интерпретации, а целого семейства допустимых решений обратной задачи. Без формализованных методов решения обратных задач справиться с этой проблемой невозможно. Выясняется, что, по меньшей мере, в отношении обратных задач рудного типа, разумной альтернативы конечноэлементным моделям геологической среды, которые можно было бы положить в основу таких методов, нет. Достаточно сопоставить, с одной стороны, факт существования эффективных конечноэлементных методов решения рудных обратных задач (Овчаренко, 1975; Страхов, Лапина, 1976а, 1976б, 1976в) и других (Балк, Долгаль, 2020), с другой — полное отсутствие в обзорной статье (Страхов и др., 2000) ссылок на формализованные методы их решения в иных модельных классах.

В период 1920–1990 гг. только советскими (а позже российскими) геофизиками было опубликовано свыше 10000 статей, посвященных вопросам интерпретации геопотенциальных полей (Страхов и др., 2000). Авторы настоящей статьи решили ограничиться только конечноэлементным подходом к задачам гравиразведки и магниторазведки. Нужно отметить, что во второй половине и в конце прошлого века опубликовано несколько обзоров (Голиздра, 1977, 1997; Колюбакин, Лапина, 1960; Пашко, Старостенко, 1982; Старостенко, 1998; Страхов и др., 2000), в которых нашли отражение и конечноэлементные методы, разработанные к тому времени.

При выборе формата статьи мы воспользовались тем, что содержание работ обзорного характера строго не регламентировано. В одних случаях (Голиздра, 1997) это дань памяти предшественникам, чьи исследования внесли в свое время заметный вклад в развитие научного

направления. В других — обзор изобилует математическими выкладками, демонстрирующими сложность предмета рассмотрения (Пашко, Старостенко, 1982). В третьих — значительная часть публикации посвящается методологическим аспектам проблемы, без понимания которых невозможно оценить значимость тех или иных результатов (Страхов и др., 2000). Мы попытались вспомнить основные вехи развития конечноэлементного подхода, сделав акцент на исследованиях, актуальных с точки зрения его дальнейшего развития.

ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ

Хотя основным предметом нашего рассмотрения являются методы решения обратных задач, нельзя обойти вниманием и методы решения прямых задач, как рабочий инструмент в диалоговых системах моделирования и как базовый элемент в автоматизированных технологиях количественной интерпретации. Если сложная задача допускает декомпозицию, ей, как правило, выгодно воспользоваться (Калинин и др., 2022). В конечноэлементном подходе, чьи истоки следует искать в палеточных способах приближенного вычисления поля (Нумеров, 1925; Jung, 1927), эта простая мысль находит воплощение в сведении прямой задачи для тела со сложными границей и законом изменения эффективной плотности (намагниченности) к сумме прямых задач для тел простой формы. Обычно, это однородные тела, которые образуют замощение заданного тела и для которых найдены быстродействующие, высокоточные и устойчивые к ошибкам округлений аналитические или смешанные способы вычисления поля.

Объективная оценка эффективности конечноэлементного подхода к прямым задачам невозможна без сопоставления его с другими подходами. Мы взяли два из них, наиболее известных — аналитический и аппроксимационный.

Кратко рассмотрим первый — аналитический подход. Некоторые формулы расчета гравитационного (магнитного) поля для «элементарных» тел (шар, круговой цилиндр и др.) датированы еще началом XIX в. (Голиздра, 1997). Отношение между конечноэлементным и аналитическим подходами к решению прямых задач неоднозначно. При вычислении поля элементарных тел аналитический подход является составной частью конечноэлементного, но становится альтернативой ему, когда претендует на самостоятельное решение прямой задачи целиком для всего тела, не прибегая к его разбиению на более «простые» тела.

Возможности аналитического подхода ограничены. В плоском варианте наиболее общими

моделями, для которых построены алгоритмы вывода явных выражений для элементов гравитационного (магнитного) полей, являются многоугольники полиномиальной плотности (намагниченности) (Страхов и др., 1985). Цитируемой работе предшествовал «шлейф» публикаций (Голиздра, 1997), в которых решение задачи получено для частных случаев или использовались менее экономичные формулы. Полиномиальный закон изменения физического параметра с успехом может быть применен для аппроксимации более сложных законов, например экспоненциального, описывающего зависимость плотности осадочных пород от глубины залегания (Авчан, Озерская, 1968; Исаев и др., 2011; Фотиади, 1957). В трехмерном варианте наиболее общей моделью, для которой построен алгоритм вывода явных формул для элементов гравитационного поля, является произвольный однородный многогранник (Страхов, Лапина, 1982). Из известных обзоров (Голиздра, 1977, 1997; Колюбакин, Лапина, 1960; Пашко, Старостенко, 1998) можно позаимствовать не один десяток ссылок на публикации, посвященные решению прямой задачи для частных случаев этого тела, причем, с использованием различных форм представления элементов гравитационного поля.

Еще один, подход к приближенному решению прямых задач основан на том, что эквивалентные по внешнему полю источники имеют одинаковые соответствующие гармонические моменты. Суть подхода (Страхов, Лапина, 1975) состоит в аппроксимации распределения масс формальным конечнопараметрическим распределением, для которого известны достаточно простые формулы решения прямой задачи и при надлежащем выборе параметров которого обеспечивается близость полей этих двух распределений. Параметры эквивалентной модели выбираются из условия совпадения нескольких первых гармонических моментов обоих распределений. Модельным классом может стать система точечных масс или непрерывные распределения — простые тела произвольной полиномиальной плотности, ограниченные плоскостями и поверхностями второго порядка. Несмотря на высокую степень общности таких алгоритмов, наиболее востребованными оказались все же конечноэлементные методы решения прямых задач (Балк, Долгаль, 2020; Виноградов, 2022; Мицын, Большаков, 2021; Широкова и др., 2022; Samacho et al., 2000; Meng et al., 2017; Vera et al., 2020 и др.).

Становление конечноэлементного подхода к прямым задачам гравиразведки и магниторазведки пришлось на 1960-е гг. и совпало с освоением геофизиками электронно-вычислительных машин. Среди целого ряда публикаций того вре-

мени, перечисленных в обзоре (Голиздра, 1997), можно выделить статью (Talwani, Ewing, 1960), которую обычно относят к аппроксимационному направлению.

Обобщив доступную информацию, мы выделили основные направления развития теории конечноэлементных методов решения прямых задач гравиразведки и магниторазведки. Прежде всего, продуцирование этих методов может идти по линии новых структур используемых замощений. Математика позволяет строить замощения геологического пространства, удовлетворяющие любым запросам интерпретатора — большое их число построено из одних только конгруэнтных выпуклых многоугольниках и многогранниках (Кларнер, 1983). Замощение может быть регулярным или не регулярным, но состоящим из подобных тел, или составлено из нескольких типов геометрических тел. При решении региональных задач целесообразно использовать замощения, в которых учитывается сферичность Земли (Старостенко, Манукян, 1983; Kosygin et al., 1997). Замощение может быть адаптивным и с помощью управляющих параметров изменяться в ходе итерационного процесса решения прямой задачи. Два примера адаптивных алгоритмов приведены ниже.

При решении задач большой размерности крайне важно оптимизировать количество аппроксимирующих прямоугольных призм при сохранении требуемой точности описания геологических границ. Для этой цели может успешно использоваться быстрое вейвлет-преобразование с базисными функциями Хаара (Долгаль, 2004).

Несомненный интерес представляет пример успешного использования триангуляции Делоне для построения сложной конечноэлементной геологической модели Цзиньчуаньского месторождения медно-никелевых руд по данным гравиметрической съемки (Xu et al., 2020), изученный разрез которого представлен 9 типами горных пород серпентинит-оливинового ряда, с плотностью от 2.67 до 3.03 г/см³. Не вызывает сомнений, что предлагаемый подход позволяет адаптироваться к морфологии геологических тел и структур за счет сгущения сети точек на наиболее сложных участках, что обеспечивает требуемую точность моделирования и экономит память компьютера.

Резервы роста числа алгоритмов, реализующих конечноэлементный подход, кроются в различных способах оценки точности аппроксимации носителя источников поля и точности дискретной (полиномиальной) аппроксимации закона изменения физического параметра по каждому из элементов замощения. К полиномиальной аппроксимации закона изменения физического параметра можно подойти формально,

как к известной математической задаче, либо с учетом потенциальности поля, требуя равенства первых гармонических моментов элементов замощения с постоянной или полиномиальной плотностью. Линейное и квадратичное приближение экспоненциально изменяющейся с глубиной плотности горных пород практиковалось в работах (Исаев и др., 2011; Myrthi, Rao, 1979; Rao, 1968).

Вывод новых, эквивалентных по назначению, но более эффективных формул всегда являлся актуальной задачей для геофизиков (вспомним работы по совершенствованию формул элементов поля однородного прямоугольного параллелепипеда). Известно, что аналитические решения прямой задачи, построенные большей частью в первой половине XX в., неустойчивы к вычислению поля в дальней зоне (Мартышко и др., 2016; Пятаков, Исаев, 2012; Страхов и др., 1985, 1986). Альтернативой им стали принципиально новые явные представления элементов поля (Страхов и др., 1986а, 1986б), которые в силу определенной инертности мышления не получили, однако, должного распространения.

Резервы разнообразия конечноэлементных методов решения прямых задач лежат не только в математической плоскости. Сравнение двух методов обычно осуществляется по эффективности их компьютерных реализаций, в которых учтены особенности архитектуры используемых вычислительных средств и технологий программирования. Практическая отдача от удачного выбора языка программирования, использования многоядерных процессоров, в концепцию которых конечноэлементные алгоритмы вписываются просто идеально, визуализации промежуточных результатов моделирования поля с помощью интерфейса, задействования оперативной памяти компьютера для хранения результатов многократно дублируемых вычислений, иных находок, которые принято относить к искусству программирования, может существенно превзойти возможности более совершенных аналитических выкладок. К примеру, в алгоритме, предложенном в работе (Пятаков, Исаев, 2012), блок операций с плавающей точкой позволяет увеличить скорость расчетов на два порядка, а в работе (Мартышко и др., 2016) в программном продукте учтено, что отдельные вычисления при работе с соседними элементами некоторых типов замощений повторяются.

Полагаем, что получить общее представление о современном состоянии конечноэлементного подхода в проблематике прямых задач и том, в какой мере перечисленные резервы оказались востребованы, можно по следующим трем методам.

Предложенный в работе (Мартышко и др., 2016) алгоритм решения трехмерной прямой задачи гравиразведки рассчитан на произвольный носитель масс S и закон изменения их эффективной плотности δ . Что нетипично, уравнение границы носителя S в постановке задачи не фигурирует, зато задан параллелепипед $D \supset S$, на котором и ставится прямая задача. В ряде случаев такая подмена вполне окупается и может заметно упростить задачу, поскольку проблема замощения сложных носителей, с которыми приходится сталкиваться на практике, не всегда является тривиальной (Гольдшмидт, 1984). Если нет необходимости, нет и нужды в особых замощениях — в обсуждаемом методе используется замощение области D параллелепипедами $V_{i,j}^k$, причем плотность аппроксимируется кусочно-постоянной функцией, что ведет к снижению времени реализации метода за счет однократного вычисления общих фрагментов формулы поля для отдельных элементов $V_{i,j}^k$.

В итерационном методе (Глазнев, Лошаков, 2012), акцент сделан на том, что обоснованное снижение размерности модели ведет к уменьшению вычислительных затрат и повышению устойчивости результата. Регулярное замощение не очень подходит для целей сокращения времени вычислений. Носитель, собранный из некоторого числа m элементов V_j регулярного замощения обычно удается путем объединения соседних элементов представить суммой значительно меньшего числа m_1 разновеликих тел, подобных V_j . Метод сводится к построению минимального числа разновеликих квадратов, аппроксимирующих произвольный плоский носитель S с заданной точностью (без его предварительного замощения конгруэнтными квадратами малых размеров). На каждом шаге $r = 1, 2, \dots, k$ метода те фрагменты носителя, которые прежде не удалось покрыть квадратами больших размеров, частично покрываются квадратами со стороной $2^{-r}h$. В программной реализации алгоритма, в котором легко угадываются идеи фрактального анализа последний удобно ассоциировать со специализированным графом — (неполным) квадратомиическим деревом. Метод демонстрирует нестандартный подход к выбору адаптивного замощения, подстраивающегося к текущему приближению. Одним из достоинств метода является согласование точности аппроксимации носителя с точностью вычисления аномального эффекта.

В методе, предложенном в работе (Исаев и др., 2011) нет прямых указаний на то, что он относится к классу конечноэлементных. Метод предназначен для решения прямой задачи в условиях субгоризонтально-слоистого геоплотностного разреза, типичного для нефтегазовых

провинций. Предлагается решение актуальной задачи достижения точности моделирования поля, не уступающей точности детальной гравиметрической съемки с современной аппаратурой. Задача осложняется экспоненциальным законом изменения эффективной плотности масс, аппроксимация которого кусочно-постоянной функцией влечет к недопустимой погрешности решения прямой задачи, ставящей под сомнение целесообразность использования высокоточных измерений в задачах данного класса. Выбор «элементарных» тел, набором которых аппроксимируется геоплотностная среда, подчинен максимальной эффективности решения прямой задачи с учетом трансцендентности в законе изменения плотности по глубине.

Быть может неожиданный вывод, к которому мы пришли, состоит в следующем: в основе современных методов решения прямых задач гравиразведки и магниторазведки по умолчанию лежит уверенность, что возможные потери от использования не самых совершенных аналитических конструкций можно успешно компенсировать возможностями вычислительных средств.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

В математике обратные задачи подразделяются на линейные и нелинейные в соответствии с типом оператора прямой задачи (Тихонов и др., 1995). Среди геофизиков на этот счет нет единого мнения и благополучно сосуществуют несколько различных классификаций обратных задач. В одних за основу взяты особенности строения изучаемой геологической среды, в других — математические особенности постановки обратной задачи. Будем придерживаться определения (Ягола и др., 2021), по которому в линейных обратных задачах задается область, в которой требуется оценить распределение физического параметра объектов, создающих аномалию поля, тогда как в нелинейных эффективная плотность (намагниченность) объектов считается известной, и проблема состоит в выборе среди допустимых носителей масс (магнитных масс) одного в качестве приближенного решения.

Несмотря на слабую устойчивость обратных задач в смешанной постановке предпринимались попытки создания полностью или частично формализованных методов их решения (Балк, Долгаль, 2020; Бойков, Рязанцев, 2020; Канайкин и др., 2018). При использовании диалоговых систем моделирования для реализации такой постановки линейные и нелинейные обратные задачи выступают как звенья технологической цепочки, в которой чередуются два типа построений, при этом «известные» параметры носителя в линейной обратной задаче есть результат кор-

ректировки геометрических параметров модели на предшествующем шаге. Неустойчивость решения не исчезает, а лишь прячется за относительно благополучными свойствами «частных» задач, возникающих на отдельных шагах — «линейных» и «нелинейных», и совсем «уходит в тень», если геофизик задался целью путем варьирования физических и геометрических параметров модели найти один из приемлемых, на его взгляд, вариантов интерпретации.

Идея применения конечноэлементных моделей плотностной среды при решении линейных обратных задач гравиметрии восходит к работам (Юньков, Булах, 1958а, 1958б), где она нашла воплощение в «сеточных методах».

В классической постановке линейная обратная задача гравиразведки для носителя Ω , собранного из некоторого числа элементарных тел V_j , состоит в оценивании значений эффективной плотности δ_j каждого из них при имеющейся априорной информации G . В ранних публикациях плотности δ_j принимались постоянными, затем появились более общие постановки задачи, в которых плотности описываются полиномами. Некоторые геофизики предпочитают термин «призматические модели среды» (Кобрунов, 2014), особенно если в модели присутствуют тела V_j сравнительно больших размеров (Булах, 2010). «Коварные» свойства таких моделей, проявляющиеся в концентрации высоких значений плотностей вблизи границы носителя масс, а также стремлении оптимизируемых плотностей выйти на их экстремальные допустимые значения, геофизикам известны достаточно давно (позже этот эффект получил объяснение в работе (Кобрунов, 1983)) и привели некоторых из них к мысли, что такие модели бесперспективны в практике интерпретации — ситуация похожая на ту, что была с некорректными задачами до появления работ (Тихонов, 1963а, 1963б). На время это сдерживало развитие детерминистских конечноэлементных методов, но стимулировало исследования в рамках информационно-статистического подхода, наиболее значимые из которых принадлежат авторам работы (Гольцман, Калинина, 1983). К сожалению, методы, разработанные в рамках этого подхода, плохо приспособлены к учету априорной информации детерминистского характера, что признают и сами сторонники этого подхода (Никитин, 2004).

Основой для методов решения линейной обратной задачи в классе конечноэлементных моделей является система линейных уравнений, каждое из которых приравнивает значения модельного поля к измеренному в заданных точках X_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Ее нельзя считать законченной постановкой обратной задачи: число тел V_j в модели источников поля обычно меньше n

и в силу наличия помех в измерениях поля система будет несовместной. Но если бы это и не было так, то принять решение системы уравнений за результат интерпретации означало бы позволить подобранному полю «потянуться» за помехами измерений. Другое дело, если эту систему брать за основу, довольствуясь приемлемым расхождением модельного и наблюдаемого полей и сводя задачу к минимизации функционала невязки на множестве допустимых решений. На протяжении многих лет такой подход был, едва ли, не единственным в арсенале средств инверсии поля, и сегодня остается одним из наиболее распространенных.

В силу высокой степени неустойчивости обратных задач первостепенное значение приобретает априорная информация о моделях среды и поля, которая закладывается в минимизируемый функционал, либо присутствует в ограничениях на параметры, входящие в описание этих моделей. Не разумно игнорировать априорную информацию даже когда математическая состоятельность метода достигается и без нее. В этом смысле, наиболее успешным математическим аппаратом решения линейных обратных задач гравиразведки (магниторазведки) в классах конечноэлементных моделей источников поля зарекомендовало себя линейное программирование. Довольно общая постановка линейной обратной задачи гравиразведки, фрагментарно присутствующая во многих известных методах ее решения с использованием линейного программирования, исходит из того, что аномалия гравитационного поля Δg обусловлена совокупностью тел $V_j, j = 1, 2, \dots, m$, постоянной эффективной плотности δ_j и задана в произвольных точках пространства X_i приближенными значениями $\Delta \tilde{g}_i = \Delta \tilde{g}(X_i)$, отягощенными аддитивными случайными помехами ζ_i и региональным фоном $\Delta g^\Phi(X) = \sum c_k \phi_k(X), k = 1, 2, \dots, l$, с неизвестными коэффициентами c_k . Могут быть известны интервалы $[\Delta \tilde{g}_i^\Phi, \Delta \tilde{g}_i^{\Phi}]$ возможных значений $\Delta g^\Phi(X_i)$ фоновой компоненты во всех или отдельных точках $X_i, i \in I, I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, измерения поля, либо заданы ограничения на коэффициенты c_k . Помимо двухсторонних ограничений на плотности δ_j , не нарушающие общность постановки задачи, но исключающие главную «угрозу» некорректности обратных задач — получение решения со сколь угодно большой погрешностью, в априорную информацию может входить условие гладкости пространственного распределения плотности. Его можно задать с помощью ограничений на максимально допустимые скачки $\Delta_{r,s}$ плотности между некоторыми (или всеми) соседними телами V_r и V_s , номера пар $(r, s), (r, s) \in N$, которых задает интерпретатор. Более жестким является требование моно-

тонного характера изменения эффективной плотности, оно может быть задано с помощью неравенств типа $0 < \bar{\Delta}_{r,s} \leq \delta_r - \delta_s \leq \bar{\Delta}_{r,s}$, где r и s — номера соседних элементов замощения, находящихся на разных глубинах. К слову сказать, пресловутая «скрытая эквивалентность» (Кобрунов, 2014), из-за которой метод, вопреки ожиданиям, может привести к геологически бессодержательному решению, есть следствие стремления обойтись минимумом априорной информации для удержания приближенных решений линейной обратной задачи в рамках приемлемых с физико-геологических позиций.

Собственно линейная обратная задача гравиразведки формулируется как задача оценки векторов $(\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m))$ и $(c = c_1, c_2, \dots, c_l)$ (компоненты второго вектора играют роль мешающих параметров), минимизирующие функционал в метрике L_1 или C при ограничениях, перечисленных выше. Если вектора $\delta = \delta^*$ и $c = c^*$, минимизирующий функционал, обеспечат приемлемую невязку, вектор δ^* принимается за решение обратной задачи.

Начало систематическим исследованиям по применению математического программирования для решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии было положено работами С.В. Шалаева (1961) и Л.В. Канторовича (1962). За 15 лет, прошедших после их выхода, преимущественно усилиями представителей советской школы геофизики (ссылки на соответствующие работы можно найти в монографии (Балк, Долгаль, 2020) были сформулированы большинство из известных конечномерных постановок линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии. Среди знаковых работ того времени выделим отдельно монографию (Шалаев, 1972), а также специальный выпуск сборника «Вопросы разведочной геофизики» за 1968 г. Были опробованы различные метрики близости наблюдаемого и модельного полей, даны постановки, рассчитанные на исключение влияния регионального фона (постоянного, линейного, квадратичного), исследовано влияние разнообразных типов линейных ограничений на качество интерпретации. В тот же период по этой тематике был опубликован ряд работ зарубежных геофизиков (Fisher, Howard, 1980; Mottl, Mottlova, 1972; Safon et al., 1977 и др.), в которых часто не приводились ссылки на работы советских коллег (Пашко, Старостенко, 1982).

Первые исследования по применению линейного программирования при решении обратных задачах геофизики проводились без учета их некорректности. Работа А.Н. Тихонова (1966) позволила на более высоком теоретическом уровне продолжить исследования, наиболее значимые из которых выполнены В.И. Старостенко

и С.М. Оганесяном (1974). Следуя принципу использования минимума предпосылок, достаточных для решения задачи, в разработанных методах в качестве ограничений фигурируют лишь априорные оценки плотностей δ_j , а требование гладкости присутствует в виде слагаемого в квадратичном минимизируемом функционале. Итоги развития методов решения линейных обратных задач гравиразведки и магниторазведки на начало 1980-х гг. с использованием математического программирования подведены в монографии В.И. Старостенко (1978). Последующие годы работы проводились в основном по линии обновления программного обеспечения и расширения сферы практического применения разработанных ранее методов, равно как и по обоснованию критериев оптимальности решения.

Представим три основных направления исследований XXI в., базирующихся на традиционном определении результата интерпретации в терминах единичного (наилучшего) приближенного решения обратной задачи. Первое из них отражает тенденции, когда в постановке обратной задачи отсутствует критерий оптимальности решения, выраженный в терминах некоторого функционала, а обоснованием эффективности результатов интерпретации служат некоторые эвристические соображения, положенные в основу алгоритма, ориентированного на повышение точности результатов интерпретации за счет «особенных» приемов согласования наблюдаемого и подобранного полей в пределах допустимого их расхождения. Пример тому — алгоритм, предложенный в работе (Антонов и др., 2007), который авторы анонсируют как «созданный на базе приемов, используемых в методе регуляризации». Он включает в себя два этапа. Основным этапом копирует метод из работы (Старостенко, 1978), тогда как вспомогательный повторяет те же самые построения, но уже по отношению к разности измеренного поля и модельного поля, отвечающего основному решению. Итоговое решение есть результат внесения вспомогательного решения (как поправки) в основное. По мнению авторов предложенного алгоритма, «такая итерационная процедура в значительной степени повышает надежность результатов решения обратной задачи» (Антонов и др., 2007, с. 143)

Наше мнение по этому поводу, которое не ограничивается обсуждаемой статьей и распространяется как на линейные, так и нелинейные обратные задачи, таково: качество отдельно взятого решения, по какому критерию оптимальности оно ни было бы построено, случайно в той же мере, что и реализация помех в измерениях поля. В условиях существования множества Q реше-

ний, отвечающих всей априорной информации, попытки выделить из него одно, *гарантированно* превосходящее по точности другое решение из Q , бессмысленны, каким бы «замысловатым» ни был принцип выбора. Термин «оптимальное» решение, если оно подразумевает преимущество последнего по точности, следует брать в кавычки. В работе (Балк, Долгаль, 2020) приводятся примеры, ломающие привычные представления о связи между объемом априорной информации и *фактическим* качеством отдельно взятого приближенного решения обратной задачи. В одном из примеров множество измерений разбито на непересекающиеся подмножества и при этом решение обратной задачи гравиразведки по всему объему данных уступает по точности *каждому* из приближенных решений, построенному по части этих данных, причем во всех трех основных метриках подбора. Другие примеры показывают, что при совместной интерпретации измерений двух производных гравитационного потенциала путем минимизации взвешенного функционала невязки возможна ситуация, когда результаты этой интерпретации уступят по точности решениям обратной задачи порознь по каждому полю практически при всех значениях весового коэффициента. Важно подчеркнуть, что представленные в этих примерах случаи не являются какими-то экзотическими. В каждом конкретном примере существуют широкие множества Ξ , возможных реализаций случайных помех, при которых приближенное решение обратной задачи, построенное по более скудной информации, превзойдет по точности решение по большему объему данных. До сих пор невосстановленной остается идея сопоставления двух конкурирующих решений по мощности множеств Ξ , которая в настоящей статье озвучивается впервые.

Для второго направления, объединяющим началом которого послужила концепция согласования множества Q допустимых вариантов интерпретации, определяющим является сам факт его существования. В теории интерпретации гравитационных и магнитных полей концепция получила статус «общеметодологической идеи фундаментального характера» (Страхов, 1995). Эту идею В.Н. Страхов рассмотрел по отношению к классу обратных задач, где единственным приближенным решением является вектор параметров модели, определяемый из решения системы линейных уравнений. Сама процедура согласования сводится в этом случае к «усреднению» множества построенных допустимых решений обратной задачи. Заметим, что осознание необходимости компромисса между допустимыми решениями пришло не только к геофизикам (Костомаров и др., 2011).

Но усредненное решение — это тоже одно из приближенных решений, со всеми вытекающими последствиями. Построенное «синтетическое» решение может уступить по точности отдельным усредняемым решениям. И, если уж говорить об общем характере идеи согласования, то что понимать под «усредненным» вариантом интерпретации в случае обратной задачи рудного типа, где приближенными решениями обратной задачи являются области пространства — допустимые носители возмущающих масс?

Третье направление также берет за основу факт наличия на практике множества допустимости Q и основывается на критериях теории принятия решений в условиях неопределенности и риска (Ларичев, 2002). В этом случае удастся отказаться от скалярных критериев попарного сравнения альтернативных вариантов, если качество любого допустимого решения определяется по его отношению *сразу ко всем* остальным допустимым решениям, что и имеет место в обратных задачах. Для геолого-геофизической проблематики минимаксные критерии не новы (Черемисина, Никитин, 2014), но в обратных задачах гравиразведки, судя по всему, были применены впервые в работах авторов настоящей статьи (Балк, Долгаль, 2020). Характерным особенностью этого применения является отказ от традиционной гипотезы о равенстве нулю среднего значения помехи в пользу предположения о равенстве нулю ее медианного значения, где абсолютные значения помех не играют роли, а важны лишь их знаки. Подобная смена гипотез является заметным продвижением в сторону робастных методов, в которых качество результатов незначительно зависит от небольших отступлений реальности от принятых допущений. В цитируемых работах присутствует еще одно новшество: в минимаксные критерии встроены принцип доверительной вероятности для придания им большей гибкости.

Минимаксные критерии оптимальности в вычислительном плане более затратны, чем привычные скалярные критерии, но внедрение их в практику интерпретации это шаг в сторону повышения достоверности решений обратных задач. Так, критерий выбора по минимуму максимально возможной ошибки решения позволяет получить оценку сверху для его точности, которая, к тому же, монотонно зависит от объема и качества используемой априорной информации.

Заметной вехой в развитии методов решения линейной обратной задачи гравиразведки стала статья (Канторович, 1962), ознаменовавшая выход теории за рамки классических математических форм представления результатов интерпретации. Большинству геофизиков она известна как одно из первых исследований по использованию

линейного программирования в геофизике. Не менее важным оказалось предложение считать решением задачи оценивания эффективной массы не ее оптимальную оценку, а интервал возможных ее значений. В начале 1980-х гг. идея Л.В. Канторовича была перенесена Т.В. Балк (Балк, Долгаль, 2020) на следующую постановку обратной задачи: определить экстремально возможные значения плотностей:

$$\delta_j^{\min} \min\{\delta_j; \delta \in Q_1\}, \delta_j^{\max} \max\{\delta_j; \delta \in Q_1\}, \quad (1)$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

на множестве Q_1 , обусловленном ограничениями, взятыми из традиционной постановки, с той лишь разницей, что при каждом j изымается двухстороннее ограничение на плотность δ_j , зато добавляется ограничение на расхождение наблюдаемого и модельного полей. Раздельный характер оценок δ_j^{\min} и δ_j^{\max} , геометрический смысл которых — координаты граней параллелепипеда в \mathbf{R}^m , в который вписан многогранник Q_1 , проявляется в том, что собранные из них вектора δ^{\min} и δ^{\max} не являются, вообще говоря, допустимыми решениями. В работе (Балк, Долгаль, 2020) за оценку разрешающих возможностей гравиразведки предложен функционал

$$v = 1 - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{\delta_j^{\max} - \delta_j^{\min}}{\delta_j^{(2)} - \delta_j^{(1)}}, \quad (2)$$

где каждое слагаемое в (2) — это вклад результатов интерпретации в уточнение интервала $[\delta_j^{(1)}, \delta_j^{(2)}]$, в котором находится истинное значение плотности δ_j , для модели, состоящей из m аномалиеобразующих тел.

Преимущество интервальных оценок перед единичным оптимальным решением состоит в том, что значение функционала (2) монотонно зависит от объема и качества априорных данных, с его помощью можно количественно оценить влияние любого из ограничений на информативность результата интерпретации. Если для оценки разрешающих способностей гравиразведки ввести дополнительно функционал

$$v_1 = \sum_{j \in J} mes(V_j),$$

$$J = \left\{ j: \left[\delta_j^{\min j \max} \subset [\delta_j^{(1)}, \delta_j^{(2)}] \right] \right\}, \quad (3)$$

как меру части геологического пространства (объема V), в которой удастся уточнить ранее известные значения плотности, то можно определить максимальную глубину исследований, доступную гравиразведке.

Если обратиться к работам зарубежных ученых, то близкая постановка обратной задачи сформулирована в работе (Kaufman, Hansen, 2007), но значения δ_j^{\min} , δ_j^{\max} в ней предложено вычислять не по всему множеству Q_1 , а по выборке допустимых решений обратной задачи,

которые интерпретатору удалось построить каким-либо методом. Постановка, направленная на поиск подмножества приемлемых решений обратной задачи гравиразведки, рассматривалась в (Sabatier, 1977), а в работе (Safon et al., 1977) предложено вычислять границы не только эффективной массы источников поля, но и их первых моментов.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Произвольный многогранник не определяется одними координатами своих вершин — необходимо задание его реберного графа (Страхов, Бродский, 1987), что крайне усложняет применение этой модели, как источника аномалии, в автоматизированных технологиях интерпретации. Идея использования конечноэлементных моделей источников поля при решении нелинейных обратных задач грави- и магнитометрии возникла у геофизиков практически одновременно с идеей внедрения линейного программирования в алгоритмы решения линейных обратных задач в рамках таких моделей. Уже самые ранние постановки таких задач не предусматривали задание геометрии и положения источника поля в пространстве; требовалось оценить распределение физического параметра масс в области D , заведомо содержащей их носитель. Естественно, возникала мысль использовать найденное распределение для оценки геометрии носителя путем оконтуривания фрагментов области D , состоящих из элементов V_j , на которые пришлось высокие значения физического параметра. Особые ожидания внушала постановка обратной задачи в знакоположительной области значений избыточной плотности (Перфильев, 1972) и отказ от вещественных оптимизируемых переменных в пользу целочисленных с последующим использованием бинарного программирования (Шалаев, 1966, 1972). В последнем случае с элементами замощения V_j ассоциируются переменные χ_j ; $\chi_j = 1$ — элемент V_j принадлежит носителю масс, $\chi_j = 0$ — нет. Но и этого оказалось недостаточно, чтобы «заставить» элементы замощения V_j , на которые пришлось оптимальные значения $\chi_j = 1$, группироваться в нужное число m связанных областей, да к тому же с пофрагментно гладкими границами.

Видимо, приняв за данность, что проблему локализации не решить за счет ограничений типа равенств и неравенств, исследователи сосредоточились на использовании нелинейного программирования при решении задачи уточнения координат граней конечных элементов в модели источников поля (Оганесян, 1975; Старостенко, 1978). Как и в линейном случае, в постановке фигурируют интервальные оценки

оптимизируемых параметров. Одно время серьезные ожидания были связаны с методами случайного поиска. В работах (Миньковский, Чередниченко, 1992; Оганесян, 1975; Старостенко, Оганесян, 1974) они были использованы при решении обратных задач гравиразведки, в том числе и на основе нелинейного программирования. Достаточно успешными, но, опять же в простых, не обремененных разнообразием априорных ограничений конечноэлементных постановках обратных задач, показали себя методы ϵ -эквивалентного перераспределения масс, предложенные Зидаровым (Зидаров, 1968; Zidarov, Zhelev, 1970). Позднее эти методы получили дальнейшее развитие в работах советских геофизиков. Особо следует выделить группу алгоритмов, в которых в структуру минимизируемого функционала встраивается в качестве слагаемого штрафной (сглаживающий) функционал, который играет роль фильтра, отсеивающего недопустимые варианты интерпретации. Насколько реалистична идея удержать решение в рамках допустимого с помощью одного лишь функционала, сгладить (но не перегладить) модельный носитель, дает пример применения метода фокусирующей инверсии (Жданов, 2007): притом, что замощение выполнено малым числом элементов V_j и источник поля — локальный объект, результаты практического решения обратной задачи трудно назвать убедительными.

Со временем, алгоритмы, использующие наработки из смежных научных дисциплин, стали постепенно теснить традиционные постановки и методы решения обратных задач геофизики, характеризуемые триадой «минимизируемый функционал с обязательным слагаемым в виде невязки поля, априорные ограничения детерминистского толка, классический метод решения условно-экстремальных задач». Так, в работе (Вдовина, 2010) для решения обратной задачи гравиметрии востребованы топографические приемы, при этом поле ассоциируется со стационарным энергетическим потоком. В работе (Канайкин и др., 2018) трансформация и инверсия гравитационного поля объединены в одну технологическую цепочку, использующую дисперсионный и регрессионный анализ, причем формализованный подбор служит лишь начальным приближением для последующего подбора в «ручном режиме». В работе (Кобрунов, 2014) обратная задача в классе призматических плотностных моделей формулируется как задача динамики, в которой модели претерпевают эволюцию, контролируемую параметром, трактуемым как условное время.

Можно было бы вспомнить и другие, схожие по своим возможностям методы решения обратных задач. Однако, пришлось бы констатировать,

что в плане информативности качества и результатов интерпретации большинство из них, по сути, являются эквивалентными. Объединяет их общий недостаток — отсутствие монотонной зависимости гарантированной точности решения от объема априорных данных и оценок точности решения, а также скудный набор априорной информации, фигурирующей в постановке обратной задачи. Не всегда известные методы осознанно игнорируют «избыточную» с точки зрения математики априорную информацию и ограничиваются минимумом данных, достаточных для того, чтобы иметь право отнести их к числу математически состоятельных. Этот недостаток во многом способствовал появлению в середине 1970-х гг. близких по смыслу к методу Зидарова (1968) итерационных методов решения нелинейных обратных задач рудного типа в классах конечноэлементных источников поля (Овчаренко, 1975; Страхов, Лапина, 1976а, 1976б, 1976в), использующих особенности предметной области и названные в силу понятных аналогий «монтажными». В наиболее простом из них — методе регулируемой направленной кристаллизации (РНК) (Страхов, Лапина, 1976а), использующем регулярное замощение $\{V_j\}$ и предназначенном для решения плоской обратной задачи гравirazведки для однородного связного тела S известной эффективной плотности $\delta > 0$, начальным приближением Ω_0^* может служить любой элемент замощения $V_0 \subset S$ (центр кристаллизации), а пробными вариантами очередного приближения Ω_0^* на шаге i являются конфигурации $\Omega_{i-1}^* \cup V_j$, составленные для каждого из элементов замощения V_j , граничащих с предшествующим приближением Ω_{i-1}^* . Особенность метода РНК, которую у него переняли другие монтажные методы, состоит в переводе известной эффективной плотности δ в разряд оптимизируемых. В каждом пробном варианте вычисляется эффективная плотность δ^* , минимизирующая среднеквадратическую невязку модельного и наблюдаемого поля. В качестве приближения Ω_0^* на шаге i берется пробный носитель $\Omega_{i-1}^* \cup V_j^*$, доставляющий совместно с плотностью δ^* наименьшее значение невязки. Назовем ее и соответствующую плотность локально-оптимальными и обозначим как ε_i и δ_i^* . Из физических соображений ясно, что последовательность $\delta_1^*, \delta_2^*, \dots$ имеет характер монотонно убывающей и при некотором $i = i(0)$ выполнится неравенство $\delta_{i(0)}^* \leq \delta$, что служит критерием завершения процесса. Если невязка $\varepsilon_{i(0)}$ не превысит максимально допустимую, то конфигурация $\Omega_{i(0)}^*$ принимается за приближенное решение обратной задачи.

Следует отметить, что первый опыт применения РНК в трехмерном случае анонсирован в

работе (Schäfer, Balk, 1993). В соответствии с законом Мура на протяжении многолетнего периода происходило удваивание производительности процессоров каждые два года. Это позволило не только реализовать монтажный подход для сложных распределений масс на современных компьютерах, но осуществить дальнейшее развитие метода РНК (Балк, Долгаль, 2020 и ссылки в этой работе).

Одна из рассмотренных задач касалась обобщения метода РНК на случай многосвязных распределений источников поля в виде совокупности произвольного числа локальных связных тел $S_k, k = 1, 2, \dots, m$, для каждого из которых можно указать (в качестве центра кристаллизации) свой элемент замощения $V_0^{(k)} \subset S_k$. Как и в базовом методе РНК, каждая итерация $i \geq 1$ здесь имеет целью локально-оптимально нарастить ядро одного из парциальных носителей $\Omega_{k,i-1}^*$ из предыдущего приближения Ω_{i-1}^* на один элемент замощения. Соответственно, в качестве пробных вариантов перехода к i -ому приближению $\Omega^* = (\Omega_{1,i}^*, \Omega_{2,i}^*, \dots, \Omega_{m,i}^*)$ выступают всевозможные конфигурации $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m)$, где для какого-то одного k принимается $\Omega_k = \Omega_{k,i-1}^* \cup V_j$ (элемент замощения V_j не принадлежит предшествующему приближению Ω_{i-1}^* и граничит с парциальным носителем $\Omega_{k,i-1}^*$), тогда как для $l \neq k$ полагается $\Omega_{l,i}^* = \Omega_{l,i-1}^*$.

При $m > 0$ возникает проблема обеспечения *одновременного* выхода оптимизируемых плотностей на истинные значения $\delta_k > 0$. Для этого оптимизируемой на каждом шаге i достаточно считать лишь плотность $\delta_{1,i}$ парциального тела Ω_1 в пробной конфигурации Ω , а плотности $\delta_{k,i}, k \geq 2$, остальных $m-1$ парциальных тел Ω_k связать с $\delta_{1,i}$ линейными зависимостями:

$$\delta_{k,i} = \frac{\delta_k}{\delta_1} \delta_{1,i}, k = 2, 3, \dots, m. \quad (4)$$

Формулы (4) задают одну из возможных траекторий движения в пространстве локально-оптимальных плотностей $\delta_{k,i}^*, i = 1, 2, \dots, i(0)$, к значениям δ_k . На нулевой итерации можно предоставить методу те же стартовые условия, которые он имел бы в случае свободных плотностей. Пусть $\delta_k^{(min)}, k = 1, 2, \dots, m$, — плотности масс, распределенных по нулевым приближениям $\Omega_{k,0}^*$, при которых невязка минимальна. Положим

$$\delta_{k,i} = \frac{\delta_k(\delta_1^{(min)} - \delta_{1,i}) + \delta_k^{(min)}(\delta_{1,i} - \delta_1)}{\delta_1^{(min)} - \delta_1}, \quad (5)$$

$$k = 2, 3, \dots, m.$$

Специфика классических и монтажных методов решения обратных задач существенно разнятся между собой; если основными

математическими объектами для первых являются вектора параметров, функции и числовые последовательности, то для вторых это системы пространственных областей, свойства этих областей и операции с ними. Для дальнейшего развития монтажных методов авторам понадобилось построить (исключительно для внутреннего пользования) специализированную теорию конечноэлементных моделей среды, которая наиболее полно изложена в (Балк, Долгаль, 2020)).

Были введены понятия *ядра*, *оболочки* и *границы* произвольной конфигурации, как, соответственно: множества всех элементов замощения, составляющих эту конфигурацию, множества элементов замощения, не входящих в ядро, но граничащих с его элементами и подмножества ядра конфигурации, каждый элемент которого граничит хотя бы с одним элементом оболочки конфигурации.

В терминах этих понятий сформулированы определения связности и односвязности конфигурации, мощностью которой считается число элементов замощения, вошедших в ее ядро, а расстоянием между двумя связными конфигурациями Ω_1 и Ω_2 мощность ядра «связующей» конфигурации $\Omega_{1,2}$, объединение которой с Ω_1 и Ω_2 связно. Для оценки степени гладкости отдельных фрагментов конфигурации введено формализованное понятие «отростка» конфигурации как малосодержательного фрагмента ее границы, а также понятие «длины отростка» как числа составляющих его элементов замощения. Исходя из особенностей топологии отдельных фрагментов конфигурации и мощности их ядер выстроена иерархия критериев (пофрагментной) гладкости конфигурации, более продуктивных, чем общая (интегральная) оценка гладкости ее границы. Элементарной операцией в классе конфигураций является определение номеров всех элементов замощения и их статуса (по отношению к заданной конфигурации Ω), граничащих с заданным элементом замощения.

Важная особенность монтажных методов состоит в стремлении обеспечить условие наследования очередным приближением основных свойств предшествующего приближения, предписанных априорной информацией. По этой причине многие алгоритмы, выполняющие более сложные операции, представлены парами, в которых один алгоритм непосредственно устанавливает наличие у заданной конфигурации того или иного свойства, а второй, более экономичный, осуществляет контроль за соблюдением наследования конфигурацией этого свойства в результате «незначительной деформации» (например, наращивания ядра конфигурации на элемент замощения). Прежде всего, алгоритмизированы процедуры установ-

ления связности и односвязности конфигурации, а также ее дополнения (при необходимости) до связной и минимальной односвязной конфигурации. Для учета ограничения на допустимую близость отдельных парциальных носителей введено понятие конфигурационного расстояния и предусмотрена процедура его вычисления. Для работы с «отростками» предусмотрено распределение специального индекса на ядрах конфигураций, численные значения которого суть длина максимального «отростка», содержащего данный элемент замощения. Построены алгоритмы «разрушения» «отростков» за счет изъятия из их ядер по возможности минимального числа элементов замощения, либо, напротив, за счет дополнения заданной конфигурации до минимальной конфигурации, не содержащей «отростки» неприемлемой длины. Все названные алгоритмы по умолчанию присутствуют в дальнейшем при обсуждении списка априорных ограничений, учет которых доступен монтажному подходу. Соответственно, каждая непротиворечивая комбинация таких ограничений — это основа для отдельного метода решения обратных задач, относящегося к классу монтажных.

Исходя из размеров элементов замощения, учесть априорные ограничения на геометрию и расположение источников аномалии, а также на максимальное простираение локальных тел по заданным направлениям не представляет труда. Учет информации о принадлежности тех или иных локальных областей определенным парциальным носителям обеспечивается простым включением принадлежащих этим областям элементов замощения в нулевые приближения с запретом на последующее изъятие этих элементов из ядер всех приближений к этим носителям (последнее замечание уместно для модификаций монтажных методов, допускающих не только наращивание ядер текущих приближений). Учет информации о том, что отдельные области пространства не могут быть фрагментами тех или иных парциальных носителей сводится к запрету определенных элементов замощения входить в ядра всех текущих конфигурационных приближений к этим носителям. Информация о (не) допустимости контактирования отдельных парциальных носителей задается с помощью бинарной матрицы $m \times m$, а контроль за этим сводится к исключению из числа пробных вариантов перехода к очередному приближению тех, которые допускают включение в оболочку одного из парциальных носителей элементов замощения, принадлежащих границе другого. Информация о минимально допустимых конфигурационных расстояниях между парциальными носителями задается с помощью целочисленной матрицы, внедиагональные элементы которой

суть минимально допустимые мощности ядер конфигураций, связующих соответствующую пару парциальных носителей. Более пристальное внимание заслуживают ограничения топологического характера (Балк, Долгаль, 2020), которые оказались труднодоступны для классических методов решения обратных задач в конечноэлементных классах моделей.

Обратимся к модификациям метода РНК, связанным с информацией о плотностях. О возможности выстраивать различные «траектории» движения последовательности многосвязных приближений к одному из допустимых носителей мы уже говорили при обсуждении зависимостей (4) и (5). Некоторые последователи монтажного (или идейно близкого к нему) принципа (Samacho et al., 2000) проявили определенный консерватизм взглядов, не видя необходимости нарушать сложившиеся стандарты в теории оптимизации и переводить известные параметры модели в свободные. Численные расчеты показывают (впрочем, это легко можно было предсказать из теоретических соображений), что без использования оптимизации значений эффективной плотности внутри каждой итерации метод РНК неминуемо стремится к малосодержательным решениям, не позволяя выйти на приемлемое значение невязки.

До недавнего времени область применения монтажных методов была ограничена предпосылкой, что эффективные плотности δ_k имеют один и тот же знак, что, в свою очередь, существенно ограничивало область применения этих методов. Геофизикам хорошо известен эффект перераспределения масс между локальными телами в случае разнознаковых плотностей. В работе (Балк, Долгаль, 2020) высказана мысль, что внутренних резервов монтажного подхода не достаточно, чтобы его нейтрализовать, и предложено предварять работу метода процедурой разделения поля с помощью истокообразной аппроксимации. В соответствующем методе, отчасти использующем элементы эвристики, исходная задача разбивается на две подзадачи для компонент поля, каждая из которых обусловлена массами эффективной плотности одного знака.

Другой задачей является развитие монтажных методов, связанное с использованием различных моделей наблюденного поля. Речь может идти о различных метриках оценки близости наблюденного и модельного полей, обусловленных различными свойствами помех в измерениях, а также об использовании модели интерпретируемого поля, отличной от аддитивной. Выборку помех, подчиняющихся одному закону распределения, легко принять за реализацию помех, распределенных по другому закону. В этой связи нет особого смысла в методе реше-

ния обратной задачи, и особенно в иллюстрационных примерах делать упор на используемый тип помех, как это часто делается. В то же время, всякий метод интерпретации, претендующий на универсальность, обязан удовлетворять запросам геофизика. В работе (Балк, Долгаль, 2020) приводятся примеры, в которых близость полей оценивается в метриках L_1 и C . Отмечена следующая особенность монтажных методов: минимизация может осуществляться в одной метрике, к примеру, удобной в вычислительном плане, тогда как выбор локально-оптимального варианта из числа пробных — в другой, и это не слишком сказывается на выходе метода на одно из допустимых решений. Также приводится постановка обратной задачи, когда в наблюдениях присутствует фоновая компонента. Правда, проблема возможного перераспределения суммарного поля между полем источников и региональным фоном остается. Мультипликативно-аддитивные модели поля не приводят к особым вычислительным затратам, поскольку благодаря соотношениям типа (4), (5) оптимизируемой на шаге все также будет лишь одна из плотностей.

Перейдем к модификациям, касающимся структуры итерационного шага. Принцип наращивания на каждом шаге ядра парциального носителя на один элемент замощения — это лишь одна из возможностей в арсенале монтажного подхода. Серийные расчеты показали, что при «средней сложности» модели среды метод РНК позволяет выйти на допустимый вариант интерпретации при помехе порядка 2–3% от амплитуды аномалии, что сопоставимо с уровнем помех в измерениях гравитационного поля. Добиваться снижения невязки ниже приемлемого порога нет смысла, поскольку это не ведет к гарантированному повышению качества решения, но в силу требований, предъявляемых к монтажным методам в технологиях, реализующих гарантированный подход, проблема достижения по возможности наименьшей невязки актуальна. Новые структуры итерации могут внести свой вклад в решение этой проблемы.

Успешно опробована обратная к РНК процедура регулируемой направленной раскристиализации (РНР), когда начальными приближениями к носителям S_k служат конфигурации $\Omega_k^+ \supset S_k$, а на каждой итерации i из ядра одного из парциальных приближений локально-оптимальным образом изымается элемент замощения (Балк, Долгаль, 2020). Установлено, что при некоторых типах априорной информации процедура РНР более удобна, чем РНК. Вместе с тем, оба метода — РНК и РНР, — обладают неприятным методологическим изъяном: поскольку включение в ядро (исключение из ядра) на некотором шаге i локально-оптимального элемента замощения V_j

может быть неудачным с позиций всего итерационного процесса, и предусмотреть это нельзя, необходима принципиальная возможность корректировки результатов предшествующих построений. Обеспечить это можно по-разному. Наиболее экономичный способ состоит в том, чтобы позволить наращивать ядра парциальных носителей не только за счет одного элемента из их оболочек, но и за счет элементов, изъятых из границы другого носителя. Еще одна возможность — регулируемая направленная перекристаллизация (РНП), как обмен между оболочкой и границей парциального носителя по одному элементу замощения. Монтажные методы допускают произвольное чередование шагов РНК, РНР и РНП, осуществляемое с помощью системы управляющих параметров. В принципе не исключен более сложный обмен, в котором участвуют все элементы оболочки и границы текущего приближения, если исключить полный перебор пробных вариантов, предоставив шаговую оптимизацию классическим методам минимизации (Балк, Долгаль, 2020).

Число частных постановок обратной задачи, которые можно «смонтировать» из перечисленных априорных ограничений, сопоставимо с числом других известных методов решения обратной задачи рудного типа в классе конечноэлементных моделей среды (Балк, Долгаль, 2020). Именно по этой причине мы рассмотрели выше некоторые специфические особенности монтажных алгоритмов. Отметим также работу по синтезу структурной и рудной обратных задач гравиразведки, работу (Шефер, Балк, 1992) по совместной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, а также работу по совместной оценке геометрических параметров и намагниченности геологических объектов монтажным методом, ссылки на которые приводятся в монографии (Балк, Долгаль, 2020). Среди недавних работ по монтажным методам с практическими результатами отметим публикации (Виноградов, 2022; Мицын, Большаков, 2021; Широкова и др., 2022).

Разумеется, конечноэлементные методы решения обратных задач, представленные в публикациях последних лет, не замыкаются на один лишь монтажный подход. Если взять зарубежные издания, то среди них есть теоретические разработки, в которых общим с монтажными методами будет, разве что, модельный класс источников поля (Maag et al., 2017; Meng et al., 2016). Но найдутся и те, в которых обнаружатся точки соприкосновения с отдельными «фрагментами» монтажных технологий (Samacho et al., 2000; Vera et al., 2020). Мы выборочно взяли некоторые из этих статей, отражающих основные тенденции в работе с конечноэлементными моде-

лями среды при моделировании геоплотностных и геомагнитных неоднородностей.

В статье (García-Abdeslem, 2000) представлены результаты трехмерной нелинейной инверсии гравитационной аномалии над телом сульфидных руд в Сакатекасе (Мексика). Модель рудного тела состоит из призм постоянной плотности, в качестве ограничений на параметры модели используются данные пробуренной скважины. Предварительная оценка протяженности объекта по латерали осуществлена на основе градиентных трансформаций гравитационного поля в редукции Буге.

Для повышения скорости трехмерной гравитационной инверсии, использующей мелкую прямоугольную сетку для дискретизации геосреды, в работе (Farquharson, Mosher 2009) предложен метод, базирующийся на конечно-разностном решении уравнения Пуассона. В процессе вычислений осуществляется решение разреженной линейной системы уравнений методом сопряженных градиентов. Относительная невязка полей при этом составляет менее 1%. Приводится модельный пример, подтверждающий эффективность данного алгоритма.

Работа (Meng et al., 2016) посвящена методу быстрой инверсии аномального гравитационного поля для построения 3D-распределения аномальной плотности в изучаемом объеме геологической среды. Среда представлена большим количеством (до 2×10^4) прямоугольных блоков, значения плотности которых определяются путем решения линейной обратной задачи с регуляризацией по А.Н. Тихонову (1963а, 1963б). Для получения гладких моделей используется специальная весовая функция, определяющая изменение эффективной плотности с ростом глубины блоков. Приводится практический пример моделирования соляного купола Хамбл (Мексиканский залив).

В исследованиях группы авторов из разных стран (Maag et al., 2017) используется 3D-моделирование локальных аномалиеобразующих тел с использованием кубических сеток и линейных сплайнов Галеркина, представляющих собой альтернативу традиционным аналитическим методам решения прямой задачи гравиразведки. Этот же подход применяется при последующей инверсии поля.

В работе (Hongzhu et al., 2018) предложен способ решения прямой и обратной задач гравиразведки структурного типа с помощью призматической аппроксимации и быстрого преобразования Фурье. Сделан вывод, что практическое применение способа, по мнению авторов, лежит в области решения задач нефтегазовой геологии.

Большой коллектив авторов (Vera et al., 2020) разработал конечноэлементную технологию

моделирования геологических тел и структур по гравитационному и магнитному полям, в т.ч. по градиентным измерениям, использующую априорную информацию о плотностных и геометрических характеристиках аномалиеобразующих объектов. Приведены примеры ее эффективного использования при изучение глубоководных областей Мексиканского залива с широким развитием соляной тектоники. Высокая скорость вычислений достигается за счет применения параллельных вычислений на основе стандарта OpenMP.

В статье (Sun et al., 2021) рассматривается преимущество неструктурированных тетраэдрических сеток перед широко распространенным кубическими замощениями нижнего полупространства и предлагается новый алгоритм фокусирующей инверсии гравитационного поля, обеспечивающий построение компактных моделей геоплотностных неоднородностей, удовлетворяющих априорным данным.

Все рассмотренные методы — как монтажные, так и конечноэлементные, реализуют традиционные представления о результате интерпретации как единичном решении обратной задачи, обладающим некими экстремальными свойствами. Эти представления являются, по нашему мнению, едва ли, не основным препятствием дальнейшего развития теории интерпретации потенциальных полей. Конечно, если множество Q допустимых решений является достаточно узким, проблемы оптимальности выбранного из него решения, по сути, не существует, т.к. при любом расположении истинного и приближенного решений в пределах множества Q точность результата интерпретации может оказаться вполне приемлемой. К сожалению, неустойчивость обратных задач далеко не всегда позволяет рассчитывать на подобный благоприятный исход. Добиться сужения множества Q можно лишь за счет наиболее полного учета априорной информации. Во всяком случае, это ведет к минимизации максимально возможной погрешности решения, и в этом смысле у монтажных методов имеются определенные преимущества. Но не более того. Учет всех априорных данных это лишь часть решения проблемы более полного извлечения достоверной информации из геофизических данных, которую невозможно решить, оставаясь в рамках представления о результатах интерпретации как единичного допустимого решения обратной задачи. Чтобы ощутить, какова подлинная информативность отдельно взятого допустимого носителя, достаточно задаться вопросом: можно ли, исходя из его оптимальности, указать, пусть даже достаточно малый фрагмент носителя, который наверняка

принадлежит реальному объекту, кроме тех, что установлены априори.

Замечательная особенность нелинейных обратных задач гравиразведки и магниторазведки, которой не могут «похвастаться» многие другие прикладные науки, где возникают обратные задачи, состоит в том, что оценки параметров объектов не являются конечной целью геолого-геофизической интерпретации. В обратной задаче гравиразведки рудного типа ее целью является, вообще говоря, оценивание пространственной области, занятой источниками аномалии. В условиях неопределенности, это уже другая задача, чем оценивание параметров модели среды. Понимание этого момента привело на рубеже 1970–1980 гг. к становлению гарантированного подхода (библиография в работе (Балк, Долгаль, 2020)), косвенным обоснованием продуктивности которого может служить и то обстоятельство, что аналогичный подход с тем же названием получил широкое распространение в теории управления (Куржанский, 1991; Черноушко, 1980), где тоже возникают свои обратные задачи.

Если априорная информация непротиворечива и множество Q содержит конфигурацию $\Omega^0 = (\Omega_1^0, \Omega_2^0, \dots, \Omega_m^0)$, расстоянием между которой и природным носителем S можно пренебречь, то ее можно считать оцениваемым истинным решением S обратной задачи. В качестве результатов интерпретации гарантированный подход предлагает неуклучшаемые двухсторонние оценки:

$$\Omega_2^{(k)} \subset \Omega_k^0 \subset \Omega_1^{(k)}, k = 1, 2, \dots, m. \quad (6)$$

Их особенность в том, что они не нуждаются в «посреднике» — приближенном решении обратной задачи, близость к которому характеризует точность истинного решения, а сами конфигурации $\Omega_1^{(k)}$ и $\Omega_2^{(k)}$ не являются допустимыми решениями задачи. Для каждого k степень совместной близости элементов множества Q можно оценить с помощью нормированных показателей, порожденных мерой Лебега μ :

$$v_k = 1 - \frac{\mu(\Omega_2^{(k)})}{\mu(\Omega_1^{(k)})}, k = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Своим существованием конструктивные приемы построения оценок (6) обязаны тому, что для каждого k объединение и пересечение парциальных Ω_k^* носителей, входящих в *каждое* допустимое решение обратной задачи, не является единственной формой представления конфигураций $\Omega_1^{(k)}$ и $\Omega_2^{(k)}$. Всегда существует довольно емкая система представительных подмножеств из $Q_0 \subset Q$, в том числе и достаточно узких, обладающих в отношении оценок $\Omega_1^{(k)}$ и $\Omega_2^{(k)}$ теми же свойствами, что и Q . Реализация гарантированного подхода состоит в выделении из Q *любого* из таких подмножеств и сводится к направленному поиску результативных вариантов

интерпретации, каждый из которых вносит свой вклад в построение конфигураций $\Omega_1^{(k)}$ и $\Omega_2^{(k)}$. Мы рекомендуем применять методы, в основе которых лежит принцип: если очередная попытка монтажного метода при построении допустимого носителя оказалась удачной, то этот результат всегда должен быть использован (Балк, Долгаль, 2022). Выдержать названный принцип не представляет труда: если очередной носитель Ω^* будет участвовать в построении конфигурации $\Omega_1^{(k)}$, то в методе РНК достаточно в ядро нулевого приближения к Ω_k^* включить элемент замощения V_j , не принадлежащий ядрам соответствующих парциальных носителей в уже обнаруженных допустимых носителях (здесь и понадобится процедура дополнения нулевого приближения до минимального связного, предусмотренная в специализированной теории конечноэлементных моделей).

Приближенная эквивалентность, которая в обычных условиях является негативным фактором, становится «союзником», обеспечивая монтажному методу широкий выбор при поиске очередного результативного допустимого решения обратной задачи. В числе прочего, надежность оценок (6) обеспечивается за счет того, что допустимые носители, построенные для уточнения конкретного приближения к одной из $2m$ оценок в (6), попутно могут внести коррективы в текущие приближения к другим оценкам $\Omega_1^{(k)}$ и $\Omega_2^{(k)}$.

Авторами настоящей статьи было опубликовано несколько работ, посвященных конструктивным методам реализации гарантированного подхода и примерам успешного их использования (Балк, Долгаль, 2020). Однако, ни в известных нам обзорах, ни в статьях общего характера они практически не упоминаются. Мы объясняем это тем, что концепция гарантированного подхода попросту не вписывается в стандарты мышления, тесно привязанные к идее оптимальности решения и критерию его состоятельности по признаку сходимости при виртуальных, не реализуемых на практике допущениях. Справедливости ради отметим, что в XX в. эпизодически все же появлялись публикации, где отмечалась целесообразность введения новых форм представления результатов математической интерпретации геофизического поля (Рокитянский, 1985), статьи, в которых предлагались приемы извлечения информации из нескольких допустимых вариантов интерпретации (Зейгельман, 1983; Тюленева и др., 1989).

При всех достоинствах гарантированный подход не обещает извлечение максимально возможного объема информации, которая была бы полезной при решении поставленной задачи. Дальнейшее повышение информативности гео-

физического метода связано с аддитивными методами интерпретации, разрабатываемыми авторами в последние 10 лет (библиография в (Балк, Долгаль, 2020)), и, продвигающими идеи, заложенные в гарантированный подход. Основой для их реализации может служить семейство Q_0 допустимых решений, используемых при построении конфигураций $\Omega_1^{(k)}$ и $\Omega_2^{(k)}$. С гарантированным подходом аддитивные методы объединяет представление интерпретационного процесса как процедуры суммирования информации, содержащейся в каждом из найденных допустимых решений обратной задачи. Потребность в этих методах связана с бескомпромиссным характером концепции гарантированного подхода; в нем не нашлось места естественному для задач подобного рода принципу доверительной вероятности. Стоит элементу V_j войти (не войти) в ядро хотя бы одного из допустимых носителей, как — невзирая на ничтожную вероятность события — приходится считаться с тем, что он может принадлежать (не принадлежать) истинному носителю; столь категоричная позиция противоречит здравому смыслу и снижает эффективность оценок (6).

Общая идея, объединяющая аддитивные методы интерпретации, состоит в том, чтобы на основе подмножества Q_0 построить одну или несколько функций $\lambda(X)$, позволяющих оценить вероятность успешного решения поставленной перед геофизическим методом задачи, если имеет место адекватность модельных представлений и их взаимная непротиворечивость, а само решение будет согласовано с этими функциями. В принципе, к ним можно отнести функцию гарантии $\lambda_k(X)$, $X \in D$, $k = 1, 2, \dots, m$, как иную запись оценок (6):

$$\begin{aligned} \lambda_k(X) &= 1 \text{ при } X \in \Omega_2^{(k)}, \\ \lambda_k(X) &= 0 \text{ при } X \in \Omega_1^{(k)} \setminus \Omega_2^{(k)}, \\ \lambda_k(X) &= -1 \text{ при } X \in D \setminus \Omega_1^{(k)}. \end{aligned}$$

Статистическая оценка вероятности события $X \in \Omega_k^0$ равна: 1 при $\lambda_k(X) = 1$; 0 при $\lambda_k(X) = -1$. При $\lambda_k(X) = 0$ об оценке вероятности события $X \in \Omega_k^0$ ничего определенного сказать невозможно.

Наиболее наглядным примером таких функций является функция локализации $\lambda_k(V_j)$, как частота, с которой среди всех найденных допустимых носителей $\Omega^* \in Q_0$ встречаются те, где в ядро парциального носителя Ω_k^* входит элемент замощения $V_j \in D$, $k = 1, 2, \dots, m$ (Балк, Долгаль, 2020):

$$\lambda_k(V_j) = \frac{\sum_{\Omega^* \in Q_0} \phi(V_j, \Omega_k^*)}{|Q_0|}. \quad (8)$$

Здесь $\phi(V_j, \Omega_k^*)$ равняется единице при $V_j \in \text{Ker}(\Omega_k^*)$ и нулю в противном случае (Ker — символ ядра конфигурации). Если «приложить» распределение (8) к парциальному носителю

в каком-то допустимом носителе Ω^* , то получим обобщенное решение с ранжированием его фрагментов по статистической оценке вероятности обнаружения в них возмущающих масс. За оценку информативности обобщенного решения обратной задачи предлагается функционал:

$$\vartheta(\Omega^*) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{|Ker(\Omega_k^*)|} \sum_{V_j \in Ker(\Omega_k^*)} \lambda_k(V_j). \quad (9)$$

Традиционные методы решения обратных задач, в которых носитель является «неделимой единицей информации», не в состоянии сделать вывод типа «хотя полное совпадение модельного носителя, выбранного в качестве оптимального, с носителем Ω^0 , ассоциируемым с истинным, чрезвычайно мала, но по меньшей мере его фрагмент V_j является частью пространства, которая с такой-то оценкой вероятности заполнена возмущающими массами». Аддитивные же методы позволяют поднять эту оценку до величины (8), которая в отдельных случаях ($V_j \subset \Omega_2^{(k)}$) может достичь единицы. И в этом нет противоречия, поскольку для справедливости такой оценки достаточно, чтобы область V_j принадлежала *любому* одному из допустимых носителей.

В настоящее время продолжают исследования, направленные на совершенствование аддитивных методов (Балк, Долгаль, 2022). Был предложен ряд функций $\lambda(X)$, среди которых выделим *функцию обнаружения* как оценку вероятности подсечения возмущающего тела скважиной, пробуренной в точку X . Сформулирована концепция аддитивных методов интерпретации, которая не отрицает возможность включения в «пакет» информации об источниках поля, наряду с функциями типа λ , отдельных допустимых решений обратной задачи, в т.ч. и оптимальных по максимуму критерия ν .

Монтажный метод и аддитивные технологии успешно использовались при решении широкого круга геологических задач (Балк, Долгаль, 2020), приведем лишь некоторые примеры. В 1992–1993 гг. пределах Боотонкагского рудопроявления (Центральный Таймыр) 4 из 5 рекомендованных скважин вскрыли искомые объекты — дифференцированные интрузии габбро-долеритов. Получены положительные результаты при поисках платино-медно-никелевых, медно-молибденовых и других типов руд в Норильском районе, Республике Тыва, Северном Приморье. По материалам гидромагнитной съемки построены модели питающих магматических систем целого ряда подводных вулканов Тихого океана. В настоящее время эти разработки применяются при изучении динамики процессов деформации породных масс и прогнозе опасных ситуаций в процессе гравиметрического мониторинга на Верхнекамском месторождении калийно-магниевых солей (Burchkov et al., 2021).

Словосочетание «проблема извлечения максимально достоверной и полной информации об источниках аномалии» служит преамбулой к формулировке цели создания почти всех известных методов количественной интерпретации гравитационных и магнитных полей. В большинстве своем, решение проблемы предполагается осуществлять либо путем привлечения новых объемов априорных данных, либо за счет «особого» критерия выбора наилучшего варианта интерпретации из числа допустимых. Сложившиеся стереотипы столь сильны, что не всегда позволяют видеть очевидное: концепция оптимального решения не может самостоятельно закрыть проблему полноты извлечения информации из геофизических данных. Существенный прорыв в решении проблемы повышения информативности геофизических исследований готовы обеспечить технологии, реализующие концепцию гарантированного подхода и направленные на выявление общих геофизически содержательных свойств, присущих каждому из решений, составляющих некое репрезентативное подмножество допустимых решений обратной задачи. К методам, предназначенным для отбора «представительных» допустимых решений предъявляются повышенные требования. Непредвзятый анализ существующих алгоритмов показал, что в случае обратных задач рудного типа наиболее пригодны для названной цели монтажные методы для конечноэлементных моделей среды, для которых доступен одновременный учет практически всех встречающихся типов априорной информации.

До некоторых пор отсутствие технологий, реализующих концепцию гарантированного подхода, можно было объяснить недостаточной мощностью вычислительных средств. На взгляд авторов, она достигла уровня, при котором постановка вопроса о создании подобных технологий вполне своевременна. Предлагаемая обзорная статья имеет также целью лишний раз обратить внимание на практически не востребуемые резервы гавиразведки и магниторазведки, связанные с гарантированным подходом и аддитивными методами, позволяющими, в числе прочего, решать те задачи, которые принято считать прерогативой информационно-статистического направления в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и образования РФ в рамках соглашения по государственному заданию № 075-03-2021-374 от «29» декабря 2020 г. (рег. номер 122012000398-0).

Список литературы [References]

- Авчан Г.М., Озерская М.А.* Закономерность уплотнения осадочных пород с глубиной // Известия АН СССР. Серия геологическая. 1968. № 2. С. 137–141 [Avchan G.M., Ozerskaya M.A. Zakonomernost uplotneniya osadochnykh porod s glubinoy Regularity of compaction of sedimentary rocks with depth // Izvestiya AN SSSR. Seriya geologicheskaya. 1968. № 2. P. 137–141 (in Russian)].
- Антонов Ю.В., Муравина О.М., Иванова Н.Ю.* Решение обратной задачи гравиразведки при объемном моделировании // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Геология. 2007. № 1. С. 141–145 [Antonov Yu.V., Muravina O.M., Ivanova N.Yu. The decision of the three-dimensional task of gravity // Vestnik Voronezh state University. Ser. Geology. 2007. № 1. P. 141–145 (in Russian)].
- Балк П.И., Долгаль А.С.* Аддитивные технологии решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки. М.: Научный мир, 2020. 455 с. [Balk P.I., Dolgal A.S. Additivnyye tekhnologii resheniya obratnykh zadach gravirazvedki i magnitorazvedki. Moscow: Nauchny Mir, 2020. 455 p.].
- Балк П.И., Долгаль А.С.* Двухсторонние оценки типа включений для локализации и детализации местоположения источников гравитационного поля // Физика Земли. 2022. № 3. С. 108–120. <https://doi.org/10.31857/S0002333722030024> [Balk P.I., Dolgal A.S. Double-Sided Estimates of Inclusion Type for Localizing and Detailing the Location of the Gravitational Field Sources // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2022. V. 58. № 3. P. 394–405. <https://doi.org/10.1134/S1069351322030028>].
- Бойков И.В., Рязанцев В.А.* К вопросу об одновременном восстановлении плотности и уравнения поверхности в обратной задаче гравиметрии для контактной границы // Сибирский журнал вычислительной математики. 2020. Т. 23. № 3. С. 289–308. <https://doi.org/10.15372/SJNM20200304> [Boikov I.V., Ryzantsev V.A. On simultaneous restoration of density and surface equation in an inverse gravimetry problem for a contact surface // Numerical Analysis and Applications. 2020. V. 13. № 3. P. 241–257. <https://doi.org/10.1134/S1995423920030040>].
- Булах Е.Г.* Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наукова думка, 2010. 464 с. [Bulah E.G. Pryamye i obratnye zadachi gravimetrii i magnitometrii. Kiev: Naukova dumka, 2010. 462 p.].
- Вдовина Е.П.* Томографический алгоритм решения прямой и обратной задачи гравиметрии с учетом плотностной неоднородности среды // Геоинформатика. 2010. № 2. С. 46–53 [Vdovina E.P. Tomograficheskii algoritm resheniya pryamoy i obratnoy zadachi gravimetrii s uchetom plotnostnoy neodnorodnosti sredy // Geoinformatika. 2010. № 2. P. 46–53].
- Виноградов В.Б.* Применение монтажного метода для совместного истолкования гравитационного и магнитного полей // Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей. Материалы 48-й сессии Международного научного семинара им. Д.Г. Успенского – В.Н. Страхова. СПб: ВСЕГЕИ. 2022. С. 66–69 [Vinogradov V.B. Primeneniye montazhnogo metoda dlya sovmestnogo istolkovaniya gravitatsionnogo i magnitnogo poley // Voprosy teorii i praktiki geologicheskoy interpretatsii geofizicheskikh poley. Materialy 48-j sessii mezhdunarodnogo nauchnogo seminar im. D.G. Uspenskogo – V.N. Strakhova. SPb: VSEGEI. 2022. P. 66–69 (in Russian)].
- Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. М.: из-во «Мир», 1984. 428 с. [Gallagher R. Finite element analysis. Fundamentals. Moscow: izd-vo «Mir», 1984. 428 p. (in Russian)].
- Глазнев В.Н., Лошаков Г.Г.* Об одном методе моделирования рудных объектов с использованием адаптивной аппроксимации // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Геология. 2012. № 1. С. 243–246 [Glaznev V.N., Loshakov G.G. One method for modeling ore objects with using adaptive approximation // Vestnik Voronezh state University. Seriya Geology. 2012. № 1. P. 243–246 (in Russian)].
- Голыздра Г.Я.* Основные методы решения прямой задачи гравиразведки на ЭВМ. Обзор. Региональная, разведочная и промысловая геофизика. М.: ВИЭМС, 1977. 98 с. [Golizdra G.Ya. Osnovnyye metody resheniya pryamoy zadachi gravirazvedki na EVM. Obzor. Regionalnaya, razvedochnaya i promyslovaya geofizika. Moscow: VIEMS, 1977. 98 p. (in Russian)].
- Голыздра Г.Я.* История методов решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии / Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке. Труды конференции. М.: 1997. ОИФЗ РАН. С. 121–148 [Golizdra G.Ya. Istoriya metodov resheniya pryamykh zadach gravimetrii i magnitometrii / Razvitiye gravimetrii i magnitometrii v XX veke. Trudy konferentsii. Moscow: OIFZ RAN, 1997. P. 121–148 (in Russian)].
- Гольдшмидт В.И.* Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. М.: Недра, 1984. 184 с. [Goldshmidt V.I. Optimizatsiya protsessa kolichestvennoy interpretatsii dannykh gravirazvedki. Moscow: Nedra, 1984. 184 p. (in Russian)].
- Гольцман Ф.М., Калинина Т.Б.* Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий. Л.: Недра, 1983. 248 с. [Gol'tsman F.M., Kalinina T.B. Statisticheskaya interpretatsiya magnitnykh i grvitatsionnykh anomalii. Leningrad: Nedra, 1983. 248 p. (in Russian)].
- Долгаль А.С.* Использование быстрого вейвлет-преобразования при решении прямой задачи гравиразведки // ДАН. 2004. Т. 399. № 2. С. 250–252 [Dolgal A.S. Using of fast wavelet transform when primal problem solving of gravitational prospecting // Doklady Earth Sciences. 2004. V. 399. № 8. P. 1177–1179].
- Жданов М.С.* Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007. 712 с. [Zhdanov M.S. Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems. Moscow: Scientific world, 2007. 712 p. (in Russian)].
- Зейгельман М.С.* Один тип эквивалентности при оценке глубины залегания намагниченных масс // Доклады АН УССР. Сер. Б. 1983. № 8. С. 10–13 [Zeygelman M. S. Odin tip ekvivalentnosti pri otsenke glubiny zaleganiya namagnichennykh mass // Doklady Akademii nauk USSR. Ser. B. 1983. № 8. P. 10–13 (in Russian)].

- Зидаров Д.* О решении обратной задачи потенциала и его применении в геофизике. София: изд-во Болгарской АН, 1968. 155 с. [*Zidarov D.* O reshenii obratnoy zadachi potentsiala i yego primenenii v geofizike. Sofiya, ed. Bolgarskoy AN. 1968. 155 p.].
- Исаев В.И., Косыгин В.Ю., Лобова Г.А., Пятаков Ю.В.* Интерпретация данных высокоточной гравиразведки. Вертикальный градиент плотности // Известия Томского политехнического ун-та. 2011. Т. 319. № 1. С. 83–90 [*Isayev V.I., Kosygin V.Yu., Lobova G.A., Pyatakov Yu.V.* Interpretatsiya dannykh vysokotochnoy gravirazvedki. Vertikal'nyu gradiyent plotnosti // Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo un-ta. 2011. V. 319. № 1. P. 83–90 (in Russian)].
- Калинин Д.Ф., Егоров А.С., Большакова Н.В.* Потенциальная нефтегазоносность Западно-Камчатского побережья и ее связь со структурно-тектоническим строением Охотоморского региона по геофизическим данным // Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле. 2022. № 1. Вып. № 53. С. 59–75. <https://dx.doi.org/10.31431/1816-5524-2022-1-53-59-75> [*Kalinin D.F., Egorov A.S., Bolshakova N.V.* Oil and gas potential of the West Kamchatka coast and its relation to the structural and tectonic structure of the Sea of Okhotsk region based on geophysical data // Vestnik KRAUNTs. Nauki o Zemle. 2022. № 1(53). P. 59–75].
- Канайкин В.С., Турутанов Е.Х., Буянтогтох Б.* Решение обратных задач гравиметрии с помощью методов математической статистики. Известия Сибирского отделения Секции наук о Земле Российской академии естественных наук. 2018. № 41(4). С. 67–78 [*Kanaikin V.S., Turutanov E.Kh., Buyantogtokh B.* Solving inverse problems of gravimetry by mathematical statistics methods // Izvestiya Sibirskogo otdeleniya Sektzii nauk o Zemle Rossiiskoi akademii estestvennykh nauk. 2018. № 41(4). P. 67–78. <https://dx.doi.org/10.21285/2541-9455-2018-41-4-67-78>].
- Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. № 5. С. 701–709 [*Kantorovich L.V.* O nekotorykh novykh podkhodakh k vychislitel'nyum metodam i obrabotke nablyudeniy // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. 1962. V. 3. № 5. P. 701–709 (in Russian)].
- Кларнер Д.А.* Математический цветник. М.: Мир, 1983. 492 с. [*Klarnern D.A.* Mathematical recreations. Moscow: Mir. 492 p. (in Russian)].
- Кобрунов А.И.* К теории методов подбора // Геофизический журнал. 1983. Т. 5. № 4. С. 34–43 [*Kobrunov A.I.* K teorii metodov podbora // Geofizicheskiy zhurnal. 1983. V. 5. № 4. P. 34–43 (in Russian)].
- Кобрунов А.И.* Скрытая эквивалентность и эффективность интерпретации гравиметрических данных // Физика Земли. 2014. № 2. С. 53–62 [*Kobrunov A.I.* Hidden equivalence and efficiency of gravity data // Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2014. T. 50. № 2. P. 203–211. <https://doi.org/10.1134/S1069351314020049>].
- Колубакин В.В., Лапина М.И.* Обзор способов решения прямой и обратной задач магнитной разведки. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 362 с. [*Kolyubakin V.V., Lapina M.I.* Obzor sposobov resheniya pryamoy i obratnoy zadach magnitnoy razvedki. Moscow: Izd. AN SSSR, 1960. 362 p. (in Russian)].
- Костомаров Д.П., Зайцев Ф.С., Сучков Е.П.* Построение сильно различающихся решений некоторого класса некорректных задач с неточно заданными входными данными // ДАН. 2011. Т. 437. № 3. С. 316–320 [*Kostomarov D.P., Zaitsev F.S., Suchkov E.P.* Construction of Substantially Different Solutions for a Certain Class of ILL-Posed Problems with Approximately Set Input Data // Doklady Physics. 2011. V. 56. № 3. P. 145–149. <https://doi.org/10.1134/S1028335811030128>].
- Куржанский А.Б.* Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26 [*Kurzhansky A.B.* The identification problem – theory of guaranteed estimates // Automation and Remote Control. 1991. V. 52. № 4. P. 447–465].
- Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решения: Учеб. для вузов / 2-е изд., перераб. и доп. М.: Логос, 2002. 391 с. [*Larichev O.I.* Teoriya i metody prinyatiya resheniya: Ucheb. dlya vuzov / 2-ye izd., pererab. i dop. Moscow: Logos, 2002. 391 p. (in Russian)].
- Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В. и др.* Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН. Ин-т геофизики, 2016. 94 с. [*Martyshko P.S., Ladovsky I.V., Fedorova N.V. et al.* Teoriya i metody kompleksnoy interpretatsii geofizicheskikh dannykh. Ekaterinburg: UrO RAN. In-t geofiziki, 2016. 94 p. (in Russian)].
- Миньковский Л.А., Чередниченко В.Г.* Аппроксимация аномального гравитационного поля и определение объекта методом случайного поиска / Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. Киев: Наукова думка, 1992. 132 с. [*Minkovsky L.A., Cherednichenko V.G.* Approksimatsiya anomal'nogo gravitatsionnogo polya i opredeleniye ob'yekta metodom sluchaynogo poiska / Interpretatsiya gravitatsionnykh i magnitnykh anomaliiy. Kiev: Naukova dumka, 1992. 132 p. (in Russian)].
- Мицын С.В., Большаков Е.М.* Монтажный метод в ГИС INTEGRО и его использование для решения обратной гравитационной задачи // Геоинформатика. 2021. № 3. С. 36–47. <https://doi.org/10.47148/1609-364X-2021-3-36-47> [*Mitsyn S.V., Bolshakov E.M.* Assembly method in GIS INTEGRО and ist usage for solving of gravitational inverse problem // Geoinformatika. 2021. № 3. P. 36–47 (in Russian)].
- Никитин А.А.* Детерминированность и вероятность в обработке и интерпретации геофизических данных // Геофизика. 2004. № 3. С. 10–16 [*Nikitin A.A.* Determinirovannost i veroyatnost v obrabotke i interpretatsii geofizicheskikh dannykh // Geofizika. 2004. № 3. P. 10–16 (in Russian)].
- Нумеров В.В.* Графический метод учета топографического влияния подземных масс на гравитационные наблюдения // Известия Геологического комитета. 1925. Т. 44. № 1. С. 39–41 [*Numerov V.V.* Graficheskiy metod ucheta topograficheskogo vliyaniya podzemnykh mass na gravitatsionnyye nablyudeniya // Izvestiya Geologicheskogo komiteta 1925. V. 44. № 1. P. 39–41 (in Russian)].
- Овчаренко А.В.* Подбор сечения двумерного тела по гравитационному полю // Вопросы нефтяной и

- рудной геофизики. Алма-Ата: Изд-во Казахского политехнического ин-та. 1975. Вып. 2. С. 71–75 [Ovcharenko A.V. Podbor secheniya dvukhmernogo tela po gravitatsionnomu polyu // Voprosy neftyanoy i rudnoy geofiziki. Alma-Ata: Izd-vo Kazakhskogo politekhnicheskogo in-ta. 1975. V. 2. P. 71–75 (in Russian)].
- Оганесян С.М. Обобщенный алгоритм решения задачи нелинейного программирования при ограничениях вида $a \leq x \leq b$ и его использование в геофизике // Доклады АН УССР. Серия Б. 1975. № 12. С. 1082–1086 [Oganesyanyan S.M. Obobshchennyy algoritm resheniya zadachi nelineynogo programmirovaniya pri ogranicheniyakh vida $a \leq x \leq b$ i yego ispolzovaniye v geofizike // Doklady AN USSR. Seriya B. 1975. № 12. P. 1082–1086 (in Russian)].
- Пашко В.Ф., Старостенко В.И. Методы решения прямых и обратных задач гравиметрии и магнитометрии на ЭВМ (по материалам зарубежных публикаций). Региональная, разведочная и промысловая геофизика. Обзор. М.: ВИЭМС, 1982. 93 с [Pashko V.F., Starostenko V.I. Metody resheniya pryamykh i obratnykh zadach gravimetrii i magnetometrii na EVM (po materialam zarubezhnykh publikatsiy). Regionalnaya, razvedochnaya i promyslovaya geofizika. Obzor. Moscow: VIEMS, 1982. 93 p. (in Russian)].
- Перфильев Л.Г. Некоторые вопросы обработки и интерпретации геолого-геофизических данных на электронных цифровых вычислительных машинах: Автореф. дисс. канд. техн. наук. М.: ВНИИГеофизика, 1972. 28 с. [Perfilyev L.G. Nekotoryye voprosy obrabotki i interpretatsii geologo-geofizicheskikh dannykh na elektronnykh tsifrovyykh vychislitelnykh mashinakh. Avtooref. diss. kand. tekhn. nauk. Moscow: VNIIGeofizika, 1972. 28 p. (in Russian)].
- Пятаков Ю.В., Исаев В.И. Методы решения прямых задач гравиметрии // Изв. Томского политехнического ин-та. Сер.: Геофизика. 2012. Т. 320. № 1. С. 105–110 [Pyatakov Yu.V., Isayev V.I. Metody resheniya pryamykh zadach gravimetrii // Izv. Tomskogo politekhnicheskogo in-ta. Ser.: Geofizika. 2012. V. 320. № 1. P. 105–110 (in Russian)].
- Рокитянский И.И. Моделирование в геоэлектрике. 1. Неоднозначность // Геофизический журнал. 1985. Т. 7. № 1. С. 15–24 [Rokityansky I.I. Modelirovaniye v geoelektrike. 1. Neodnoznachnost // Geofizicheskiy zhurnal. 1985. V. 7. № 1. P. 15–24 (in Russian)].
- Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка, 1978. 228 с. [Starostenko V.I. Ustojchivye chislennyye metody v zadachah gravimetrii. Kiev: Naukova dumka, 1978. 228 p. (in Russian)].
- Старостенко В.И. Гравитационное поле однородных n-угольных пластин и порождаемых ими призм: обзор // Физика Земли. 1998. № 3. С. 37–53 [Starostenko V.I. The Gravity Field of Polygonal Plates and Related Prisms: A Review // Fizika Zemli. 1998. № 3. P. 37–53 (in Russian)].
- Старостенко В.И., Манукян А.Г. Решение прямой задачи гравиметрии на шарообразной Земле // Известия АН СССР. Физика Земли. 1983. № 12. С. 34–50 [Starostenko V.I., Manukyanyan A.G. Resheniye pryamoй zadachi gravimetrii na sharoobraznoy Zemle // Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli. 1983. № 12. P. 34–50 (in Russian)].
- Старостенко В.И., Оганесян С.М. Нелинейное программирование в обратных задачах гравиметрии // Геофизический сборник. 1974. Вып. 62. С. 88–93 [Starostenko V.I., Oganesyanyan S.M. Nelineynoye programmirovaniye v obratnykh zadachakh gravimetrii // Geofizicheskiy sbornik. 1974. V. 62. P. 88–93 (in Russian)].
- Страхов В.Н. Геофизика и математика // Физика Земли. 1995. № 12. С. 4–23 [Strakhov V.N. Geophysics and mathematics // Fizika Zemli. 1995. № 12. P. 4–23 (in Russian)].
- Страхов В.Н. Главнейшая задача в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей в начале XXI века разрушение господствующего стереотипа мышления // Геофизика. 2001. № 1. С. 3–18 [Strakhov V.N. Glavneyshaya zadacha v razvitii teorii i praktiki interpretatsii potentsial'nykh poley v nachale XXI veka razrusheniye gospodstvuyushchego stereotipa myshleniya // Geofizika. 2001. № 1. P. 3–18 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Бродский М.А. О единственности определения многогранника по его реберному графу, приложения к обратной задаче потенциала // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по геометрии в «целом». Новосибирск. 1987. С. 116 [Strakhov V.N., Brodsky M.A. O yedinstvennosti opredeleniya mnogogrannika po yego rebernomu grafu, prilozheniya k obratnoy zadache potentsiala // Tezisy dokladov Vsesoyuznoy konferentsii po geometrii v «tselom». Novosibirsk. 1987. P. 116 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Голыздра Г.Я., Старостенко В.И. Развитие теории и практики интерпретации потенциальных полей в XX веке // Физика Земли. 2000. № 9. С. 41–64 [Strakhov V.N., Golizdra G.Ya., Starostenko V.I. Razvitiye teorii i praktiki interpretatsii potentsialnykh poley v XX veke // Fizika Zemli. 2000. № 9. P. 41–64 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Лапина М.И. Приближенная эквивалентность и ее использование при решении прямой и обратной задач гравиметрии и магнитометрии // Прикладная геофизика. 1975. Вып. 80. С. 149–176 [Strakhov V.N., Lapina M.I. Priblizhennaya ekvivalentnost i yeye ispol'zovaniye pri reshenii pryamoй i obratnoy zadach gravimetrii i magnetometrii // Prikladnaya geofizika. 1975. V. 80. P. 149–176 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Лапина М.И. Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // ДАН. 1976а. Т. 227. № 2. С. 344–347 [Strakhov V.N., Lapina M.I. Montazhnyy metod resheniya obratnoy zadachi gravimetrii // Doklady Earth Sciences. 1976a. V. 227. № 2. P. 344–347 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Лапина М.И. О монтажном принципе построения решений обратной задачи гравиметрии // Геофизический сб. Ин-та геофизики АН УССР. 1976б. Вып. 74. С. 3–19 [Strakhov V.N., Lapina M.I. O montazhnom printsipe postroyeniya resheniy obratnoy zadachi gravimetrii // Geofizicheskiy sb. In-ta geofiziki AN USSR. 1976b. V. 74. P. 3–19 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Лапина М.И. Решение обратной задачи гравиметрии методом регулируемой

- направленной кристаллизации / Перспективы развития методов геологической интерпретации гравитационных аномалий. М. 1976в. С. 66–78 [Strakhov V.N., Lapina M.I. Resheniye obratnoy zadachi gravimetrii metodom reguliruyemoy napravlennoy kristallizatsii / Perspektivy razvitiya metodov geologicheskoy interpretatsii gravitatsionnykh anomalii. Moscow. 1976c. P. 66–78 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямые задачи гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников // Известия АН СССР. Физика Земли. 1982. № 4. С. 45–67 [Strakhov V.N., Lapina M.I. Pryanuyye zadachi gravimetrii i magnitometrii dlya proizvol'nykh odnorodnykh mnogogrannikov // Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli. 1982. № 4. P. 45–67 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Лапина М.И., Ефимов А.Б. Решение прямых задач гравиметрии и магнитометрии на основе новых аналитических представлений для элементов полей от типовых аппроксимирующих тел: 1 и 2 // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986а. № 6. С. 35–69 [Strakhov V.N., Lapina M.I., Efimov A.B. Resheniye pryamykh zadach gravimetrii i magnitometrii na osnove novykh analiticheskikh predstavleniy dlya elementov poley ot tipovykh approksimiruyushchikh tel: 1 i 2 // Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli. 1986a. № 6. P. 35–69 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Лапина М.И., Ефимов А.Б. Решение прямых задач гравиметрии и магнитометрии на основе новых аналитических представлений для элементов полей от типовых аппроксимирующих тел: 1 и 2 // Известия АН СССР. Физика Земли. 1986б. № 7. С. 66–78 [Strakhov V.N., Lapina M.I., Efimov A.B. Resheniye pryamykh zadach gravimetrii i magnitometrii na osnove novykh analiticheskikh predstavleniy dlya elementov poley ot tipovykh approksimiruyushchikh tel: 1 i 2 // Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli. 1986b. № 7. P. 66–78 (in Russian)].
- Страхов В.Н., Лапина М.И., Шубникова М.П. Решение прямых двумерных задач гравиметрии и магнитометрии для многоугольников с полиномиальной плотностью и намагниченностью на основе комбинированных алгоритмов / Решение прямой и обратной задач гравиметрии и магнитометрии (вопросы теории и методики). М.: Наука, 1985. С. 102–190 [Strakhov V.N., Lapina M.I., Shubnikova M.P. Resheniye pryamykh dvumernykh zadach gravimetrii i magnitometrii dlya mnogougolnikov s polinomialnoy plotnostyu i namagnichennostyu na osnove kombinirovannykh algoritmov / Resheniye pryamoy i obratnoy zadach gravimetrii i magnitometrii (voprosy teorii i metodiki). Moscow: Nauka, 1985. P. 102–190 (in Russian)].
- Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН. 1963а. Т. 151. № 3. С. 501–504 [Tikhonov A.N. O reshenii nauchno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii // Doklady Earth Sciences. 1963a. V. 151. № 3. P. 501–504 (in Russian)].
- Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН. 1963б. Т. 153. № 1. С. 49–52 [Tikhonov A.N. O regulyarizatsii nekorrektno postavlennykh zadach // Doklady Earth Sciences. 1963b. V. 153. № 1. P. 49–52 (in Russian)].
- Тихонов А.Н. О некорректных задачах оптимального планирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6. № 1. С. 81–89 [Tikhonov A.N. O nekorrektnykh zadachakh optimalnogo planirovaniya // Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki. 1966. V. 6. № 1. P. 81–89 (in Russian)].
- Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с. [Tikhonov A.N., Leonov A.S., Yagola A.G. Nelineynyye nekorrektnyye zadachi. Moscow: Nauka, 1995. 312 p. (in Russian)].
- Тюленева С.Г., Фишман В.М., Зюганов С.К. Построение достижимых границ области допустимых скоростных разрезов в рамках τ -метода // ДАН. 1989. Т. 308. № 5. С. 1107–1111 [Tyuleneva S.G., Fishman V.M., Zyuganov S.K. Postroyeniye dostizhimykh granits oblasti dopustimykh skorostnykh razrezov v ramkakh τ -metoda // Doklady Earth Sciences. 1989. V. 308. № 5. P. 1107–1111 (in Russian)].
- Фотиади Э.Э. О зависимости пористости и плотности пород осадочного покрова от глубины их залегания // Геология нефти. 1957. № 4. С. 59–60 [Fotiadi E.E. O zavisimosti poristosti i plotnosti porod osadochnogo pokrova ot glubiny ikh zaleganiya // Geologiya nefi. 1957. № 4. P. 59–60 (in Russian)].
- Черемисина Е.Н., Никитин А.А. Системный анализ в природопользовании. М.: ВНИИГеосистем, 2014. 117 с. [Cheremisina E.N., Nikitin A.A. Sistemnyy analiz v prirodopolzovanii. Moscow: VNIIGeosistem, 2014. 117 p. (in Russian)].
- Черноусько Ф.Л. Оптимальные гарантированные оценки неопределенностей с помощью эллипсоидов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 3. С. 3–11 [Chernousko F.L. Optimalnyye garantirovannyye otsenki neopredelennostey s pomoshchyu ellipsoidov // Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika. 1980. № 3. P. 3–11 (in Russian)].
- Шалаев С.В. О количественном геологическом истолковании сложных магнитных аномалий на электронных цифровых машинах // Прикладная геофизика. 1961. Вып. 31. С. 193–202 [Shalaye S.V. O kolichestvennom geologicheskom istolkovanii slozhnykh magnitnykh anomalii na elektronnykh tsifrovyykh mashinakh // Prikladnaya geofizika. 1961. V. 31. P. 193–202 (in Russian)].
- Шалаев С.В. Математическое программирование в геофизике. Записки Ленинградского горного института. 1966. Т. 50. Вып. 2. С. 53–68 [Shalaye S.V. Matematicheskoye programmirovaniye v geofizike. Leningradskogo gornogo instituta. 1966. V. 50. Iss. 2. P. 53–68 (in Russian)].
- Шалаев С.В. Геологическое истолкование геофизических аномалий с помощью линейного программирования. Л.: Недра, 1972. 141 с. [Shalaye S.V. Geologicheskoye istolkovaniye geofizicheskikh anomalii s pomoshchyu lineynogo programmirovaniya. Leningrad: Nedra, 1972. 141 p. (in Russian)].
- Шефер У., Балк Т.В. Монтажный метод решения совмещенной обратной задачи гравиметрии и магнитометрии // ДАН. 1992. Т. 327. № 1. С. 79–83 [Shefer U., Balk T.V. Montazhnyy metod resheniya sovmeshchennoy obratnoy zadachi gravimetrii i magnitometrii // ДАН. 1992. Т. 327. № 1. С. 79–83 (in Russian)].

- resheniya sovmeshchennoy obratnoy zadachi gravi-
i magnitometrii // Doklady Earth Science. 1992. V. 327.
№ 1. P. 79–83 (in Russian)].
- Широкова Т.П., Спиридонов И.В., Мицын С.В.* Мон-
тажный метод в ГИС INTEGRО для решения
обратной задачи магнитного поля // Гео-
информатика. 2022. № 3. С. 30–38. <https://doi.org/10.47148/1609-364X-2022-3-30-38> [*Shirokova T.P., Spiridonov I.V., Mitsyn S.V.* Assembly method in GIS INTEGRО and its usage for solving of magnetic inverse problem // Geoinformatika. 2022. № 3. P. 30–38 (in Russian)].
- Юньков А.А., Булах Е.Г.* Возможности использования метода сеток для интерпретации аномалий горизонтального градиента силы тяжести // Труды института геологических наук АН УССР. Серия геофизическая. 1958а. Вып. 2. С. 94–97 [*Yunkov A.A., Bulakh E.G.* Vozmozhnosti ispolzovaniya metoda setok dlya interpretatsii anomalii gorizontalnogo gradiyenta sily tyazhesti // Trudy instituta geologicheskikh nauk AN USSR. Seriya geofizicheskaya. 1958a. V. 2. P. 94–97 (in Russian)].
- Юньков А.А., Булах Е.Г.* О точности определения плотности аномальных масс методом сеток // Доклады АН УССР. 1958б. № 11. С. 1234–1237 [*Yunkov A.A., Bulakh E.G.* O tochnosti opredeleniya plotnosti anomalnykh mass metodom setok // Doklady AN USSR. 1958b. V. 2. P. 1234–1237 (in Russian)].
- Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.Н.* Обратные задачи и методы их решения. Приложение к геофизике. М: изд-во «Лаборатория знаний», 2021. 219 с. [*Yagola A.G., Van Yanfey, Stepanova I.E., Titarenko V.N.* Obratnyye zadachi i metody ikh resheniya. Prilozheniye k geofizike. Moscow: izd-vo «Laboratoriya znaniy», 2021. 219 p. (in Russian)].
- Bychkov S., Dolgal A., Simanov A.* Interpretation of gravity monitoring data on geotechnical impact on the geological environment // Pure and Applied Geophysics. 2021. V. 178. № 1. P. 107–121. <https://doi.org/10.1007/s00024-020-02640-8>
- Camacho A.G., Montesinos F.G., Vieira R.* Gravity inversion by means of growing bodies // Geophysics. 2000. V. 65. № 1. P. 95–101.
- Farquharson C.G., Mosher C.R.W.* Three-dimensional modelling of gravity data using finite differences // Journal of Applied Geophysics. 2009. V. 68. № 3. P. 417–422. <https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2009.03.007>
- Fisher N.J., Howard L.E.* Gravity interpretation with aid of quadratic programming // Geophysics. 1980. V. 45. № 3. P. 403–419.
- García-Abdeslem, J.* Nonlinear 3-D inversion of gravity data over a sulfide ore body // Geofisica Internacional. 2000. V. 39. № 2. P. 179–188.
- Hongzhu Cai, Bin Xiong, Yue Zhu.* 3D Modeling and Inversion of Gravity Data in Exploration Scale // Gravity-Geoscience Applications, Industrial Technology and Quantum Aspect. 2018. <https://doi.org/10.5772/intechopen.70961>
- Jung. K.* Diagramme zur Bestimmung der Terrainwirkung für Pendel und Drehwaage und zur Bestimmung der Wirkung «zweidimensionaler Massenordnungen» // Zeitschrift für Geophysik. 1927. Bd. III. № 3. P. 201–212.
- Kaufman A.A., Hansen R.O.* Principles of the Gravitational method. Elsevier, Academic Press, 2007. P. 259.
- Kosygin V.Yu., Pyatakov Yu.V., Krasikov V.N.* Direct Gravity Problem for a Spherical Polyhedron // Geology of Pacific Ocean. 1997. V. 13. P. 857–868.
- Maag E., Capriotti J., Li Y.* 3D gravity inversion using the finite element method // SEG Technical Program Expanded Abstracts. 2017. P. 1713–1717. <https://doi.org/10.1190/segam2017-17682714.1>
- Meng Zhao hai, Li Fengting, Xu Xuechun et al.* Fast inversion of gravity data using the symmetric successive over-relaxation (SSOR) preconditioned conjugate gradient algorithm // Exploration Geophysics. 48. 2016. <https://doi.org/10.1071/EG15041>
- Mottl J., Mottlova L.* Solution of the inverse gravimetric problem with aid the integer linear programming// Geoprospection. 1972. V. 10. № 1. P. 53–62.
- Myrthi R., Rao B.* Gravity anomalies of two-dimensional bodies of irregular cross-section with density contrast varying with depth // Geophysics. 1979. V. 44. № 9. P. 1525–1530.
- Rao B.* Modelling of sedimentary basins from gravity anomalies with variable density contrast // Geophysics. 1986. V. 84. № 1. P. 207–212.
- Sabatier P.C.* Positivity constraints in linear inverse problems. I. General theory. Geophys. J. of the Royal Astronomical Society. 1977. V. 48. № 3. P. 415–441.
- Safon C., Vasseur G., Cuer M.* Some application of linear programming to the inverse gravity problem// Geophysics. 1977. V. 42. № 6. P. 1215–1229.
- Schäfer U., Balk P.* Thein version of potential field anomalies by the assembling method: The third dimension // Geodesy and Physik of the Earth. 1993. V. 11. P. 237–241.
- Sun Siyuan, Yin Changchun, Gao Xiuhe.* 3D Gravity Inversion on Unstructured Grids // Applied Sciences. 2021. V. 11. № 722. <https://doi.org/10.3390/app11020722>
- Talwani M, Ewing M.* Rapid computation of gravitational attraction of tree-dimensional bodies of arbitrary shape // Geophysics. 1960. V. 25. № 2. P. 203–225.
- Vera N., Couder-Castañeda C., Hernández J. et al.* OpenMP Implementation of a Novel Potential-Field-Data Source-Growth-Based Inversion Approach for 3D Salt Imaging in Deepwater Gulf of Mexico // Applied Sciences. 2020. V. 10. Iss. 14. № 4798. <https://doi.org/10.3390/app10144798>
- Xu Chenyang, Zhi Jun, Huo Giunta et al.* Numerical Simulation of Gravity Anomaly Based on the Unstructured Element Grid and Finite Element Method // Mathematical Problems in Engineering. 2020. Article ID 3604084. 9 p. <https://doi.org/10.1155/2020/3604084>
- Zidarov D., Zhelev Zh.* On obtaining a family of bodies with identical exterior fields-method of bubbling // Geophysical Prospecting. 1970. V. 18. Iss. 1. P. 14–33.

БАЛК, ДОЛГАЛЬ

**HISTORY OF DEVELOPMENT AND CURRENT STATUS
OF THE FINITE ELEMENT APPROACH IN THE THEORY OF INTERPRETATION
OF GRAVITATIONAL AND MAGNETIC ANOMALIES**

P.I. Balk¹, A.S. Dolgal²

¹*Berlin, Germany*

²*Mining Institute, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia, 614007;
e-mail: dolgal@mi-perm.ru*

Received October 13, 2021; revised November 30, 2022; accepted December 26, 2022

Due to the discreteness of gravitational and magnetic fields measurements in the mathematical theory of interpretation, finite element models of the environment, which have universal capabilities to deploy various a priori information, are of paramount importance. Known methods for solving inverse problems for finite element models of field sources can be divided into two classes. The first, where the interpretation result is traditionally a single solution that is optimal according to some criterion, and the second, where the interpretation results reflect a representative subset of feasible solutions of the inverse problem, which increases their authenticity. The developments of the article authors for second class methods took shape in a guaranteed approach and additive technologies for interpreting geopotential fields. The proposed review aims to promote the second class methods in the practice of interpreting gravity and magnetic anomalies, which should contribute to a more complete extraction of information from geophysical data.

Keywords: finite element approach, guaranteed approach, additive technologies, gravity exploration, magnetic exploration.