

УДК 550.831.017

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГРАВИРАЗВЕДКИ И МАГНИТОРАЗВЕДКИ

© 2012 А.С. Долгаль<sup>1</sup>, П.И. Балк<sup>2</sup>, А.Г. Деменев<sup>3</sup>, А.В. Мичурин<sup>1</sup>,  
П.Н. Новикова<sup>1</sup>, В.А. Рашидов<sup>4</sup>, Л.А. Христенко<sup>1</sup>, А.Ф. Шархимуллин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Горный институт УрО РАН, Пермь, 614007; e-mail: dolgal@mi-perm.ru;

<sup>2</sup>Германия, Берлин;

<sup>3</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, 614990;

<sup>4</sup>Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН, Петропавловск-Камчатский, 683006

Рассматриваются конечноэлементные технологии интерпретации данных гравirazведки и магниторазведки, используемые для построения истокообразных аппроксимаций полей и определения параметров их источников. Описан принципиально новый алгоритм истокообразной аппроксимации гравитационного поля. Вычислительный процесс сводится к решению серии задач одномерной оптимизации, в результате обеспечивается высокая степень совпадения наблюдаемого и модельного полей при числе источников, которое значительно меньше количества точек задания поля. Представлена общая характеристика монтажного метода решения обратной задачи гравirazведки, дано описание схемы построения монтажных алгоритмов, приводится способ вычисления оценки достоверности интерпретационных построений на основе гарантированного подхода. Предложен алгоритм уточнения конфигурации возмущающих тел при интервальном задании плотности (намагниченности), показана эффективность применения высокопроизводительных вычислительных кластеров. Приводятся модельные и практические примеры моделирования источников геопотенциальных полей.

*Ключевые слова:* гравirazведка, магниторазведка, конечноэлементный подход, монтажный метод, моделирование, алгоритм.

### ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) – численный метод, использующийся для решения широкого круга задач механики твердого тела, теплообмена, гидродинамики и др. В частности, МКЭ является важнейшим инструментом построения геоэлектрических моделей сложных геологических сред по измерениям нестационарных электромагнитных полей (Тригубович и др., 2009). Суть МКЭ заключается в приближенной замене континуальной задачи математической физики на дискретную, что позволяет более полно представить себе весь процесс ее решения, избежать многих возможных ошибок и объективно оценить получаемые результаты (Розин, 1976).

Применение МКЭ в гравirazведке базируется на использовании дискретного (сеточного)

описания геоплотностной среды, когда объем (носитель) аномалиеобразующих масс представляется в виде объединения некоторого числа элементарных геометрических фигур (к примеру, призм), плотность каждой из которых принимается постоянной. Необходимо отметить, что основное внимание в данной статье будет уделено именно интерпретации данных гравirazведки, однако все основные теоретические положения и выводы очевидным образом распространяются в область магниторазведки. Исключение составляет оценка параметров источников интенсивных (>5000 нТл) магнитных аномалий, обусловленных, в частности железорудными залежами, при которой необходимо учитывать взаимное влияние магнитных объектов.

Наиболее интенсивные исследования по созданию методов решения обратных задач гравirazведки (ОЗГ), базирующихся на исполь-

зовании сеточных моделей среды, проводились в конце 60-х – начале 70-х годов XX в. (Дядюра, Шалаев, 1968; Ломтадзе, 1968; Перфильев, 1972; Шалаев, 1972 и др.). Следует отметить, что им предшествовали работы А.А. Юнькова и Е.Г. Булаха (Юньков, Булах, 1958). В середине 1970-х годов с небольшим интервалом по времени выходят работы (Овчаренко, 1975) и (Страхов, Лапина, 1976), в которых предлагался по существу новый метод решения нелинейной ОЗГ в сеточных классах источников поля, названный монтажным. Конструктивно этот принцип был реализован в алгоритме регулируемой направленной кристаллизации (РНК).

В дальнейшем различные аспекты монтажных алгоритмов рассматривались в работах (Балк, 1993; Балк, Балк, 1995, 1996; Булах, Корчагин, 1978; Долгаль, 1993; Завойский, Неисжал, 1979; Schäfer 1990; Schäfer, Balk, 1993). В цикле работ П.И. Балка метод РНК был обобщен, а сам монтажный подход распространен на постановки обратных задач с использованием моделей многосвязной аномалиеобразующей среды с различными значениями плотностей парциальных источников, на задачи совместной интерпретации различных компонент гравитационного и магнитного полей (Балк, Балк, 1996; Шефер, Балк, 1992), на структурно-рудную обратную задачу (Балк, Балк, 1995), а также в направлении расширения типов априорной информации, доступных одновременному учету при построении допустимых решений (Балк, 1993; Балк, Балк, 2000). Однако отмечалось, что «в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей в СССР и России (да и во всем мире) не было уделено должного внимания использованию конечно-элементного описания изучаемой геологической среды» (Страхов, 1997, стр. 109).

Начиная с 2008 г. авторами был создан ряд новых алгоритмов, базирующихся на МКЭ, включающих в себя решение трехмерной ОЗГ «рудного» типа (Балк, Долгаль, 2009), совместное определение конфигурации и физических параметров источников (Балк и др., 2009), методы регулируемой направленной раскристаллизации (РНР) и регулируемой направленной перекристаллизации (РНП) (Долгаль, Мичурин, 2010; Долгаль и др., 2011), построение аналитических моделей геопотенциальных полей на основе одномерной оптимизации (Долгаль, Шархимуллин, 2011), оценку достоверности результатов количественной интерпретации (Балк, Долгаль 2010), решение обратных задач магниторазведки (ОЗМ) при интервально заданной намагниченности (Новикова, Долгаль, 2012). В настоящей работе представлены характеристики этих алгоритмов и результаты их применения.

## ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

При решении интерпретационных задач в гравиразведке используются аналитические аппроксимации поля гармоническими функциями, в качестве которых выступают поля элементарных источников (шаров, вертикальных стержней и т. п.). Такие функции В.Н. Страховым (1998) предложено называть «истокообразными». Существуют различные алгоритмы истокообразной аппроксимации, позволяющие формировать сеточные распределения масс, которые создают аномальные эффекты, близкие к наблюдаемому полю (Гравиразведка, 1990). Вопросам построения таких алгоритмов посвящена обширная литература, но мы остановимся на некоторых работах, представляющих, по нашему мнению, наибольший интерес.

Для аппроксимации гравитационного поля, заданного в  $n$  точках произвольного рельефа земной поверхности, В.И. Аронов (1976) предложил использовать поле, создаваемое  $n$  точечными массами, расположенными в узлах некоторой пространственной решетки, жестко привязанной к сети наблюдений. Оптимизируемыми параметрами при этом являются массы точечных источников. В.И. Старостенко (1978) принадлежит идея создания числовых моделей гравитационного поля с помощью устойчивых алгоритмов, основанных на принципе регуляризации А.Н. Тихонова. Е.Г. Булах (2010) при построении аналитической модели гравитационного поля успешно использовал тела класса Сретенского и метод градиентного спуска. В работах (Долгаль, Пугин, 2006; Долгаль, Симанов, 2008) показано, что применение принципов фрактальной геометрии позволяет заметно уменьшить минимально необходимое число элементарных источников поля в аппроксимационной конструкции. Теория построения линейных аналитических аппроксимаций геопотенциальных полей, основанная на методе линейных интегральных представлений, а также реализующие ее компьютерные технологии, весьма полно изложены в монографии (Страхов и др., 2009).

При всей несхожести упомянутых подходов у них есть одно общее начало – задача аналитической аппроксимации дискретных значений поля силы тяжести сводится к решению систем алгебраических уравнений. В этой связи возникают проблемы, связанные с нахождением устойчивых приближенных решений систем уравнений большой размерности (порядка  $10^4$  и выше).

В работе (Долгаль, Шархимуллин, 2011) был предложен принципиально иной подход к истокообразной аппроксимации гравитационного поля, базирующийся на идеях МКЭ и

допускающий радикальную декомпозицию основной задачи, при которой она сводится к последовательности задач одномерной минимизации. Суть данного подхода заключается в следующем.

При аппроксимации гравитационного поля  $u$ , заданного в  $N$  точках на криволинейной земной поверхности  $z = z(x, y)$ , в нижнем полупространстве формируется конечное множество всевозможных положений элементарных источников (масс)  $m$ , согласованное с сетью задания исходных значений поля. Эти массы  $m$  располагаются на разных уровнях глубин  $S = \{S_k\}$ ,  $k = 1, 2, 3 \dots K$  и представляют собой трехмерные тела, имеющие простые аналитические выражения для вычисления гравитационных эффектов (например – шары). При этом форма всех  $K$  поверхностей размещения масс одинакова и повторяет форму рельефа поверхности измерений  $z = z(x, y)$ . Аномальный эффект источников обозначим  $u'$ , первоначально  $u'_0 = 0$ , т.е. аппроксимационная конструкция еще не содержит источников.

Вычислительный процесс имеет два цикла: внешний и внутренний. Пусть  $u'_n$  – приближение поля  $u$ , достигнутое на  $n$ -ой итерации. Внутренний цикл  $(n + 1)$ -ой итерации заключается в нахождении значения массы  $m_j$  для каждого  $j$ -го источника на уровне  $S_k$ , при этом выполняется вычисление значений функционала  $\Phi(m_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i - u_{imj} - u'_{ni})^2} / N$ . Далее среди элементов  $\{m_j\}$  выбирается единственный, на котором достигается минимальное значение функционала  $\Phi(m_j)$ . На внешнем  $(n+1)$ -ом итерационном цикле элемент  $m_j$  присоединяется к аппроксимационной конструкции, а его поле аддитивно включается в новую модель приближения поля  $u'_{n+1}$ . По мере аппроксимации более высокочастотных компонент поля, осуществляется постепенный переход с нижних уровней  $S$  на верхние, более близкие к поверхности наблюдений. Условием такого перехода является выполнение неравенства  $\Phi(m_j) - \Phi(m_{j+1}) \leq \delta$ , где  $\delta$  – малая величина, характеризующая минимально допустимую скорость итерационного процесса. Построение модели прекращается при выполнении условия  $\Phi(m_j) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность решения (обычно соизмеримая с точностью используемых данных гравиметрической съемки).

В целом, проблема оптимальности интерпретационных алгоритмов здесь стоит менее остро, чем в случае количественной интерпретации гравитационного поля, и потому выбор той или иной схемы вычислительного процесса здесь достаточно широк и не стеснен какими-то априорными ограничениями. Методы, реализующие

идею конечноэлементного подхода, вполне могут кооперироваться с классическими методами решения условно-экстремальных задач, если такая кооперация эффективна.

Приведем пример апробации алгоритма на практическом примере. На рис. 1а представлено аномальное гравитационное поле, измеренное на резко расчлененном рельефе земной поверхности. При этом перепад высотных отметок рельефа составляет 300 м (рис. 1б), а амплитуда наблюдаемого поля – около 15 мГал. Поле задано в  $N = 500$  точках земной поверхности, при заданном значении невязки  $\varepsilon = \pm 0.05$  мГал его удалось аппроксимировать полем всего 216 точечных масс (рис. 1в).

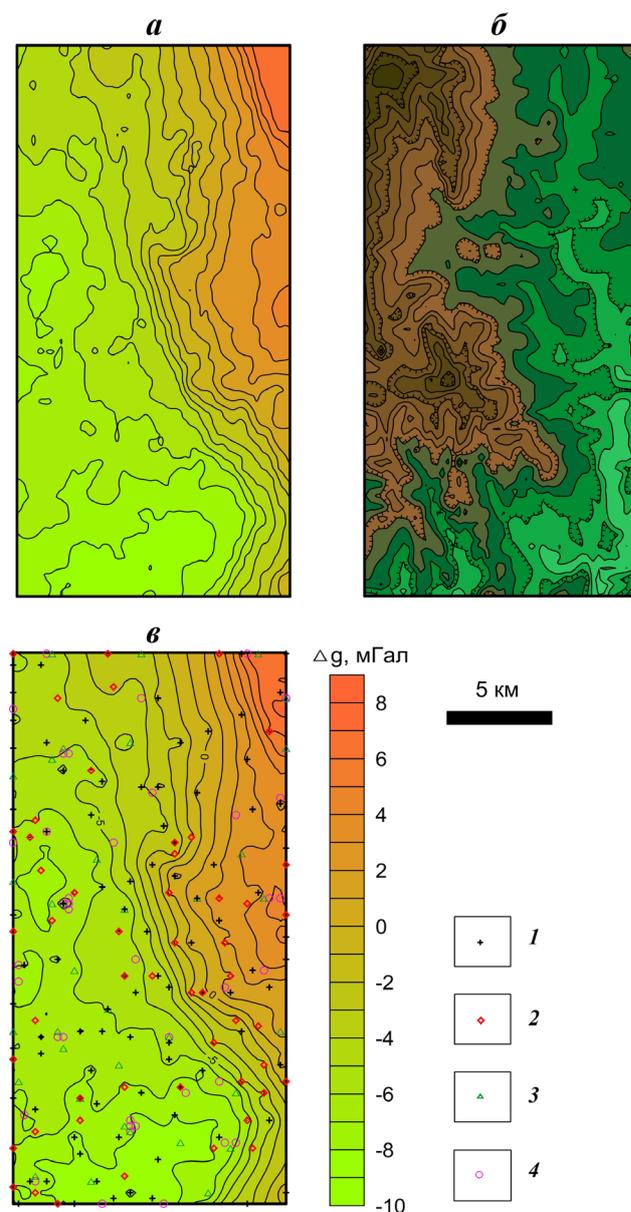


Рис. 1. Наблюдаемое гравитационное поле в пределах горной части Урала (а), рельеф земной поверхности (б), модельное гравитационное поле (в): глубина шаров, создающих модельное поле: 1 – 265 м; 2 – 530 м; 3 – 1060 м; 4 – 2120 м.

Так как предложенный алгоритм допускает очевидное распараллеливание вычислений, то в дальнейшем необходимо оценить потенциальную эффективность его реализации на многопроцессорных компьютерных системах. Одной из областей его применения может стать формирование баз данных для геоинформационных систем. Вместо массива значений наблюдаемого гравитационного или магнитного поля более рационально хранить лишь аппроксимирующую его конструкцию, имеющую существенно меньшую размерность, то есть перейти от цифровых карт полей к их аналитическим аппроксимациям. Преимущества такого подхода обсуждались в работе (Страхов, 1997). В числе прочего, он дает возможность восстанавливать поле в произвольно выбранных точках пространства вне источников, а также выполнить асимптотически оптимальные по точности трансформации, учитывающие различия в аппликатах  $z$  точек измерений.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТОЧНИКОВ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В КЛАССЕ КОНФИГУРАЦИОННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС

Сущность монтажного метода составляет неразрывное единство конфигурационного (конечноэлементного) способа описания плотностной среды и специального способа построения приближенного решения в классе таких моделей, не связанного с нелинейными методами оптимизации. Необходимо пояснить, что *регулярным замощением* плоскости называется представление этой плоскости совокупностью правильных замкнутых многоугольников (элементов замощения)  $\omega_\alpha$ , плотно прилегающих друг к другу по целой стороне; *конфигурационным распределением масс* называется распределение масс постоянной плотности  $\sigma$  по области  $\Omega$ , являющейся объединением некоторого числа элементов замощения  $\omega_\alpha$ .

Основные операции в классе конфигурационных распределений масс выполняются с использованием понятий ядра  $Я[\Omega]$ , оболочки  $O[\Omega]$ , внутреннего ядра  $Я_0[\Omega]$  и границы  $\Gamma[\Omega]$  конфигурации  $\Omega$ :  $Я[\Omega]$  – суть множество элементов  $\omega_\alpha \in \Omega$ ;  $O[\Omega]$  – множество всех элементов  $\omega_\alpha \notin Я[\Omega]$ , граничащих с элементами ядра  $Я[\Omega]$ ;  $Я_0[\Omega]$  – множество элементов  $\omega_\alpha \in \Omega$ , граничащих только с элементами этого же ядра;  $\Gamma[\Omega]$  – множество элементов  $Я[\Omega]$ , не вошедших в  $Я_0[\Omega]$  (рис. 2).

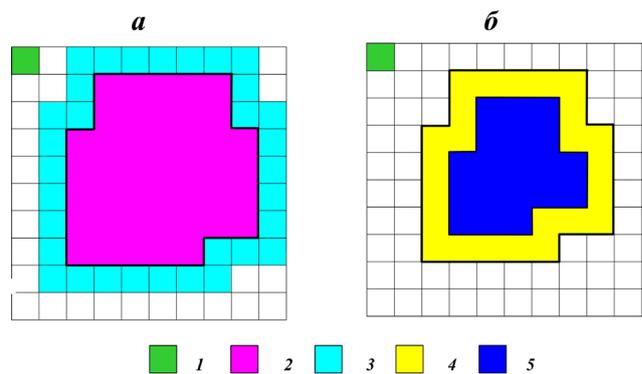
Проблема выбора замощения  $\Omega = \cup \omega_\alpha$  аналогична традиционной проблеме выбора класса и параметрической размерности модели источников поля и также требует компромиссного решения: с одной стороны, увеличение размеров

элементов замощения  $\omega_\alpha$  снижает вычислительные затраты на поиск допустимого решения и повышает его устойчивость; с другой – степень дискретизации геологического пространства должна быть такой, чтобы при оценке допустимого значения невязки подбора поправкой за погрешность конечноэлементного представления источников можно было пренебречь. Опыт показывает, что общие соображения и интуиция вполне достаточны для выбора приемлемого замощения (к тому же, у интерпретатора остается в резерве имитационное моделирование).

В простейшей постановке ОЗГ для изолированного тела  $\Omega^T$  известной плотности  $\sigma^T > 0$ , монтажный принцип решения обратной задачи состоит в том, чтобы, отправляясь от заданной связной конфигурации  $\Omega^0$ , выстроить конечную последовательность  $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2, \dots$ , имеющую предел некоторую конфигурацию  $\Omega^*$ , поле которой при подобранной плотности  $\sigma^* \approx \sigma^T$ , согласуется с измерениями гравитационного поля  $\Delta g_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Поясним, что в монтажных алгоритмах связность помогает разделять в геологическом пространстве области, занятые массами с различными значениями физического параметра. Односвязность аномалиеобразующих тел предполагает отсутствие в них пустот.

В модификации РНК очередное приближение  $\Omega^n$  образуется путем внесения в ядро  $Я[\Omega^n]$  какого-то одного элемента из  $O[\Omega^{n-1}]$ , обеспечивающего наименьшую среднеквадратическую невязку подбора. При переходе от конфигурации  $\Omega^{n-1}$  к конфигурации  $\Omega^n$  учитывается основная априорная информация, которой обычно располагает интерпретатор о местоположении, форме и размерах аномалиеобразующих тел.

Используя простейшие логические операции с индексами  $\alpha$  элементов замощения



**Рис. 2.** Графическая иллюстрация основных понятий, используемых в монтажном методе: оболочка  $O[\Omega]$  и ядро  $Я[\Omega]$  (а); граница  $\Gamma[\Omega]$  и внутренность  $В[\Omega]$  двумерной конфигурации  $\Omega$  (б): 1 – отдельный элемент замощения  $\omega_\alpha$ ; 2-5 – элементы замощения  $\omega_\alpha$ , принадлежащие: 2 – ядру  $Я[\Omega]$ , 3 – оболочке  $O[\Omega]$ , 4 – границе  $\Gamma[\Omega]$ , 5 – внутреннему ядру  $Я_0[\Omega]$  конфигурации  $\Omega$ .

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ  
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ

$\omega_\alpha \in \Gamma[\Omega]$  можно легко осуществлять эффективный контроль за соблюдением различных априорных ограничений, в том числе: на область, заведомо содержащую источник поля  $\Omega^T$  и заведомо не содержащую его; на минимально и максимально возможные глубины залегания кровли и подошвы аномалиеобразующего объекта  $\Omega^T$ ; на вертикальную  $H_z$  и горизонтальную  $H_x$  мощности объекта  $\Omega^T$  а также, на степень гладкости поверхности объекта  $\Omega^T$  и т.д. В частности, при решении 2D обратной задачи требование к выпуклости возмущающего объекта обеспечивается соблюдением простого условия: любая вертикальная и горизонтальная прямая должна пересекать его границу не более двух раз.

Обеспечение условия гладкости в процессе моделирования контролируется по величине максимально допустимого числа элементов замощения  $\omega_\alpha$  в отдельных фрагментах конфигураций  $\Omega^0, \Omega^1, \Omega^2 \dots \Omega^*$ . В самом простом случае построение гладкой, геологически содержательной границы сводится к выполнению требования безотростковости носителя масс  $\Omega^n$ , заключающегося в том, что оболочки  $O[\omega_\alpha]$  элементов  $\omega_\alpha$  границы  $\Gamma[\Omega^n]$  должны содержать хотя бы по одному элементу внутреннего ядра  $Y_0[\Omega^n]$  (Балк, 1989, 1993).

Число  $L$  элементов замощения, составляющих ядро  $Y[H]$  отростка  $H$  назовем длиной этого отростка. Отношение  $\nu(\Omega)$  числа элементов, входящих в оболочку  $O[\Omega]$  конфигурации  $\Omega$ , к числу элементов, входящих в ядро  $Y[\Omega]$ , назовем индексом компактности этой конфигурации (рис. 3). При формализации условия гладкости решения можно потребовать, чтобы длина отростков в модельном носителе не превышала заданного  $L_0$ , а значение  $\nu(\Omega)$  можно использовать как интегральную характеристику гладкости носителя масс.

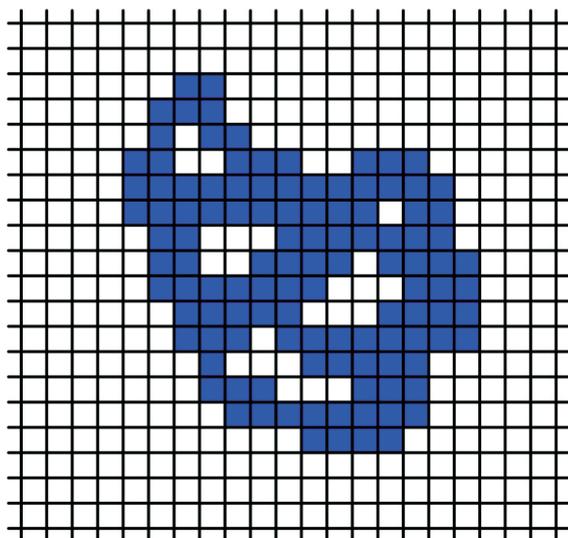
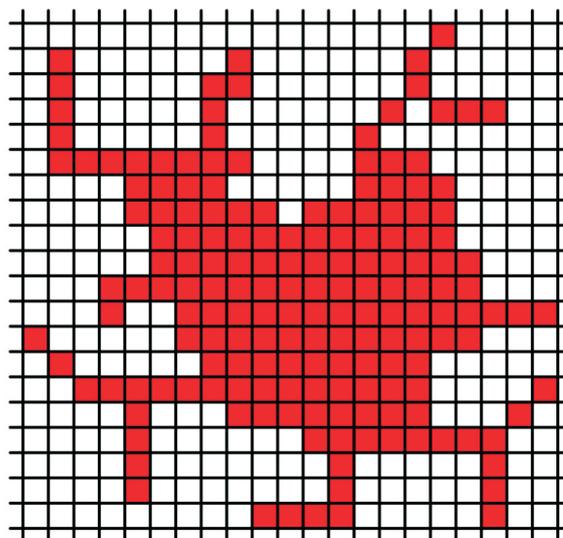
**а****б**

Рис. 3. Топологические особенности конфигураций  $\Omega$ : *а* – неодносвязная безоотростковая конфигурация,  $\nu(\Omega) = 0.56$ ; *б* – односвязная конфигурация с отростками,  $\nu(\Omega) = 1.02$ .

Хотя первая компьютерная реализация трехмерного монтажного алгоритма для локального объекта была выполнена уже 20 лет тому назад (Schäfer, Balk, 1993), интенсивно «трехмерное направление» начало развиваться лишь в последние годы (Балк, Долгаль, 2009; Балк и др., 2009). Рассмотрим опробованный на модельных и практических примерах обобщенный 3D-монтажный метод решения ОЗГ для группы возмущающих объектов, рассчитанный на применение при изучении сугубо трехмерных геологических тел и структур: гранитоидных батолитов, вулканотектонических депрессий, рифогенных образований, соляных куполов, астроблем и т.п. В генерализованном виде блок-схема созданного алгоритма приведена на рис. 4.

Базовая конфигурация разработанного программно-математического обеспечения позволяет осуществлять решение трехмерной обратной задачи, включающей указанные ниже типы априорной информации (как обязательной, так и просто допустимой).

К обязательным, задаваемым интерпретатором, данным (помимо значений наблюдаемого гравитационного поля и координат  $x, y, z$  пунктов измерений) относятся:

- размер кубического элемента замощения  $\omega_\alpha$ ;
- число  $m$  однородных тел  $S_k^T$  в модели источников поля и их плотности  $\delta_k^T$ ;
- фрагменты каждого из тел  $S_k^T$  (как минимум по одному элементу  $\omega_\alpha$  на каждое тело);
- пороговое значение  $\varepsilon_0$  среднеквадратического расхождения наблюдаемого и модельного полей.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

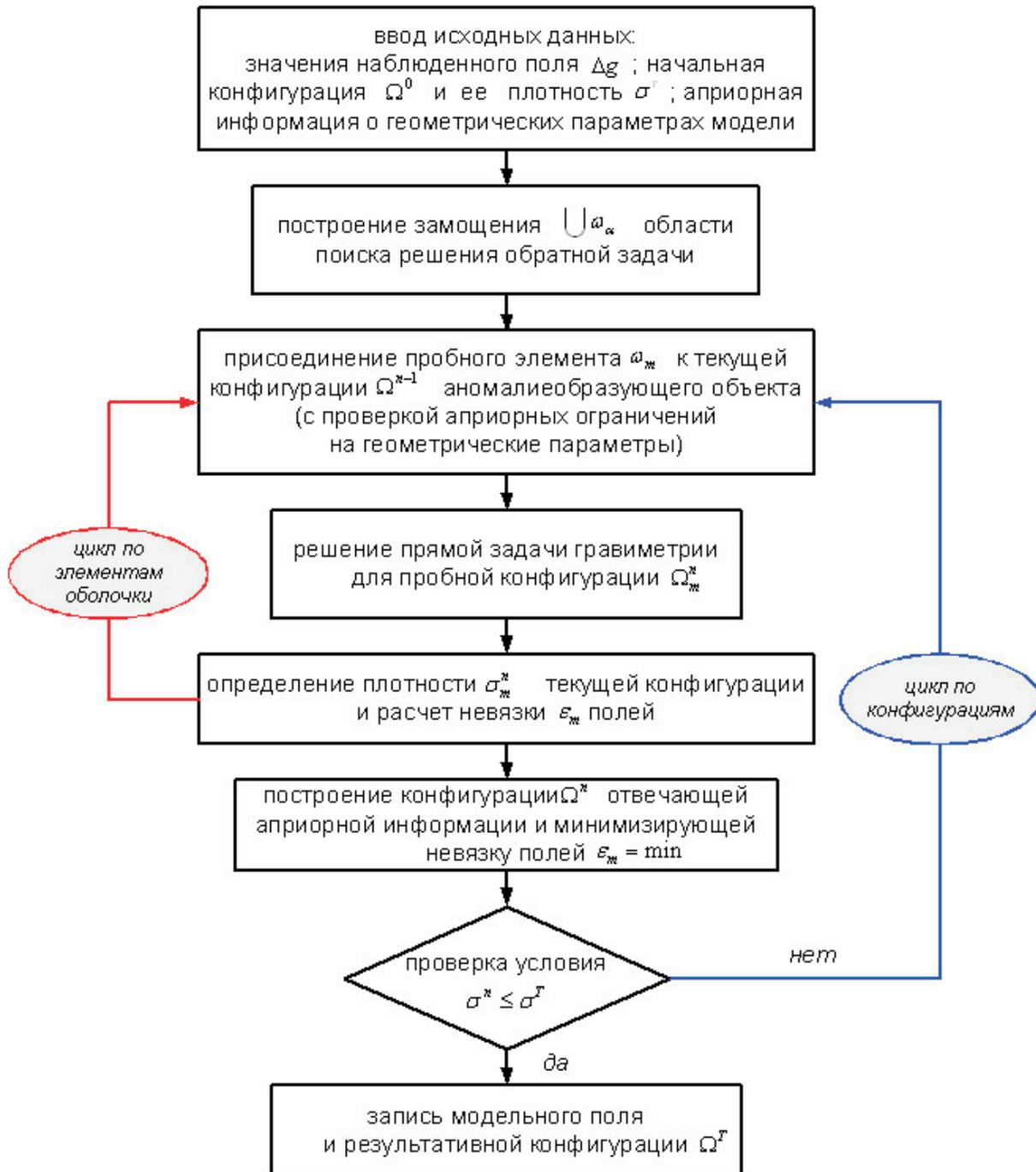


Рис. 4. Блок-схема алгоритма решения нелинейной трехмерной обратной задачи гравиразведки монтажным методом.

К необязательным (но повышающим надежность результатов интерпретации) относятся следующие данные:

- область, заведомо содержащая источники поля;
- область, заведомо не содержащая источники поля;
- минимально и максимально возможные глубины залегания верхней и нижней кромок тел  $S_k^T$ ;
- ограничения на мощность каждого из тел  $S_k^T$ ;

- любые (помимо обязательных) фрагменты тел  $S_k^T$ ;
- бинарная матрица, определяющая допустимость контактирования отдельных тел  $S_k^T$ ;
- условие гладкости поверхностей аномалиеобразующих тел (в самом простом случае – требование безостротковости подобранных носителей, заключающееся в том, что оболочки  $O[T_n]$  любого элемента  $\omega_\alpha$  границы  $\Gamma[\Omega_k^*]$  содержат хотя бы по одному элементу внутреннего ядра  $Y_0[\Omega_k^*]$ ).

Приведем пример применения монтажного метода с целью интерпретации локальной аномалии, зафиксированной при выполнении гравиметрической съемки масштаба 1:50 000 в пределах южной части Енисейского кряжа – одной из наиболее значимых золоторудных провинций нашей страны. Эта отрицательная аномалия эллипсовидной формы имеет размер  $\sim 9.2 \times 3.6$  км и амплитуду до  $-3.1$  мГал (рис. 5). С высокой степенью вероятности, учитывая имеющуюся априорную информацию, можно считать, что интерпретируемая аномалия создается мощной корой выветривания. Объекты такого типа оцениваются как весьма перспективные на обнаружение золотого оруденения, однако в этой части Енисейского кряжа они до настоящего времени остаются недостаточно изученными.

При решении обратной задачи гравиразведки использовались значения поля, заданные на площади в 451 точке, элементом замощения являлся куб со стороной 200 м. Избыточная плотность аномалиеобразующего объекта принималась равной  $-0.4$  г/см<sup>3</sup> (в абсолютном выражении это около 2.35 г/см<sup>3</sup>). После выполнения 393 итераций была достигнута невязка наблюдаемого и модельного полей  $\pm 0.15$  мГал, сопоставимая с точностью задания исходных данных. Время решения составило около 2 минут.

Построенный аномалиеобразующий объект северо-западного простирания имеет крутое падение, вытянутую форму и характеризуется максимальной глубиной залегания нижней кромки около 1.2 км (в юго-восточной части). По своим морфологическим особенностям и петроплотностным параметрам данный объект вполне соответствует древней коре выветривания, перекрытой рыхлыми отложениями (рис. 6).

Монтажный подход к решению ОЗГ и ОЗМ, по мнению авторов, снимает проблему неустойчивости в ее классическом понимании, так как конечная размерность модели и природные ограничения на ее плотностные (магнитные) и геометрические параметры изначально приводят к компактному множеству возможных решений, а учет определенного объема априорной информации обеспечивает надежное решение поставленной геологической задачи.

#### МОДИФИКАЦИИ МОНТАЖНОГО МЕТОДА

В 2009 г. была впервые реализована модификация регулируемой направленной раскристиализации (РНР), в которой начальное приближение к решению ОЗГ заведомо содержит источник поля, а очередное приближение к искомому аномалиеобразующему объекту осуществляется путем удаления из границы ядра одного элемента замощения (Долгаль, Мичурин, 2010).

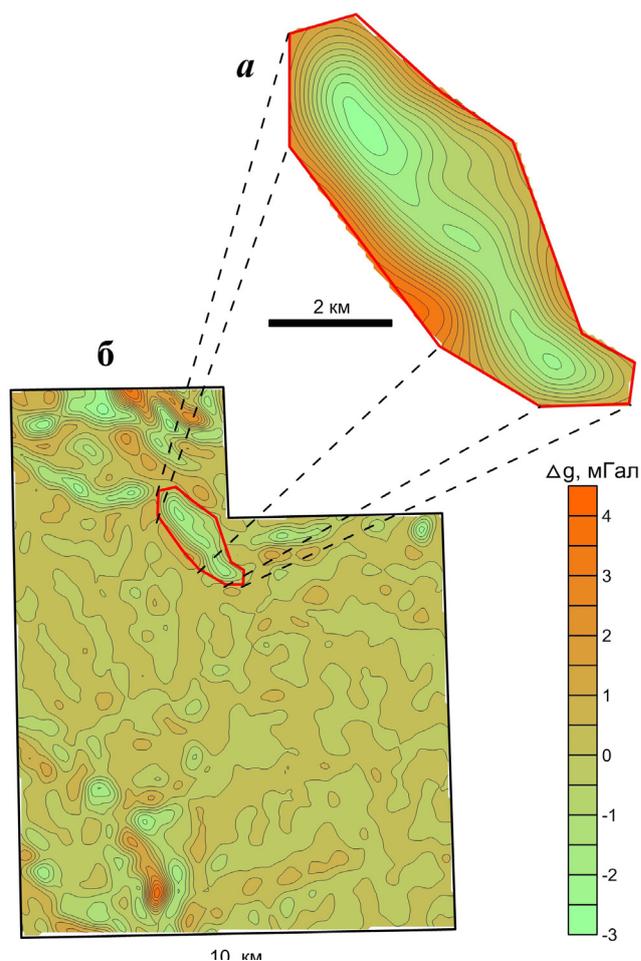


Рис. 5. Локальная аномалия силы тяжести, предположительно обусловленная древней корой выветривания (а) и ее местоположение на карте гравитационного поля (б). Южная часть Енисейского кряжа.

Проиллюстрируем работу РНР на модельных примерах. Во всех случаях источником гравитационного поля  $\Delta g$  являлась прямоугольная призма размером  $2 \times 0.5$  км, обладающая избыточной плотностью  $0.2$  г/см<sup>3</sup>; поле призмы вычислялось с шагом 250 м в 26 точках профиля, диапазон изменения значений  $\Delta g$  составил  $0.23$ – $2.49$  мГал. Начальная конфигурация  $\Omega^0$  представляла собой прямоугольник размером  $4 \times 1.6$  км, внутри которого находился аномалиеобразующий объект.

На модельном примере были проведены исследования, направленные на изучение устойчивости алгоритма РНР к уровню помех в исходных данных. Распределение помех  $\delta g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  отвечало нормальному закону с нулевым средним значением и среднеквадратическим отклонением  $\pm 0.113$ ,  $\pm 0.226$ ,  $\pm 0.452$  мГал, что составляло примерно 5%, 10% и 20% от максимальной амплитуды поля  $\Delta g$  (то есть соответствовало «низкому», «среднему» и «высокому» уровням помех). Результаты вычислительных экспериментов, представленные на рис. 7, свидетельствуют о высокой устойчивости

алгоритма РНР относительно уровня помех в исходных данных, так как все варианты решений ОЗГ дали близкие между собой результаты по пространственному совпадению между исходным аномалиеобразующим объектом и подобранной конфигурацией. Показатели качества решения ОЗГ в зависимости от уровня помех в «наблюденном поле» представлены в табл. 1.

Анализ проведенных исследований алгоритма РНР показал его устойчивость относительно изменений размеров элемента замощения  $\omega_\alpha$ . Также очевидно, что в данной модификации число итераций  $N$  является обратно пропорциональным размеру  $\omega_\alpha$  (табл. 1).

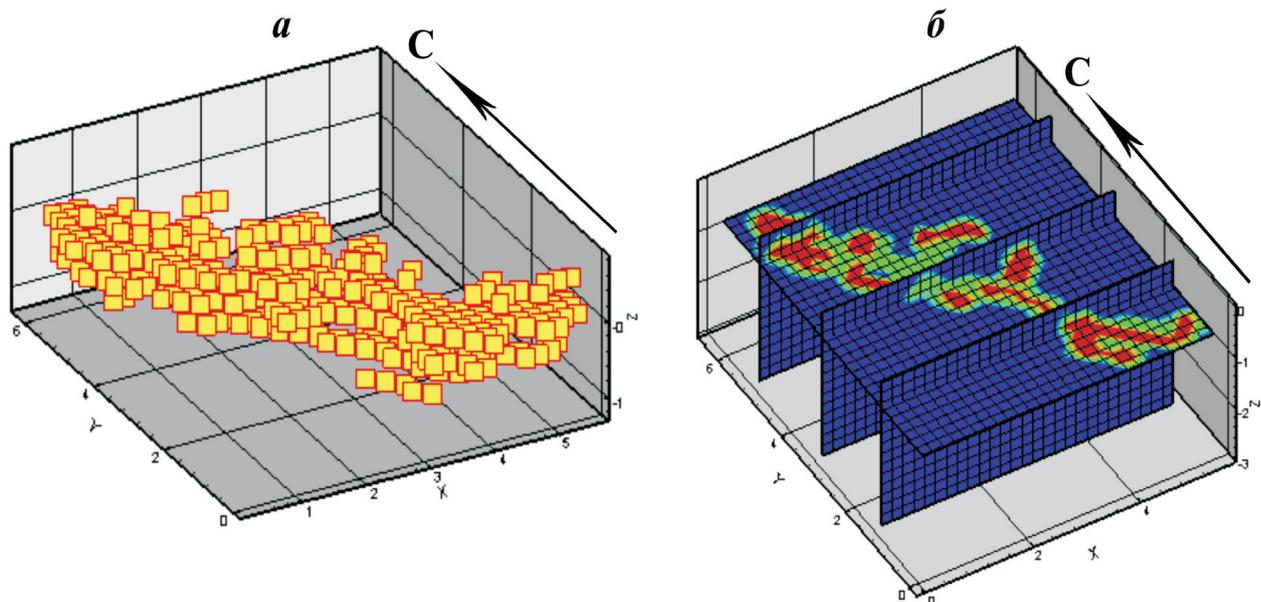
На рис. 8 приведены характеристики итерационного процесса для варианта решения ОЗГ, представленного на рис. 7г. На графике зависимости плотности от числа итераций (рис. 8а) наблюдается монотонное увеличение плотности подбираемого объекта с возрастанием количества итераций. Достижение в процессе решения априорно заданной плотности служит критерием прекращения работы алгоритма РНР.

На графике зависимости невязки полей от количества итераций (рис. 8б) наблюдается наличие малых по амплитуде возмущений, обусловленных, в числе прочего, дискретным характером преобразования носителя масс. По сути, такое немонотонное поведение невязки иллюстрирует возможности монтажных алгоритмов преодолевать локальные минимумы целевой функции, что в современной теории решения многоэкстремальных задач, само по себе, считается важным показателем состоятельности алгоритма. Указанная возможность, в свою оче-

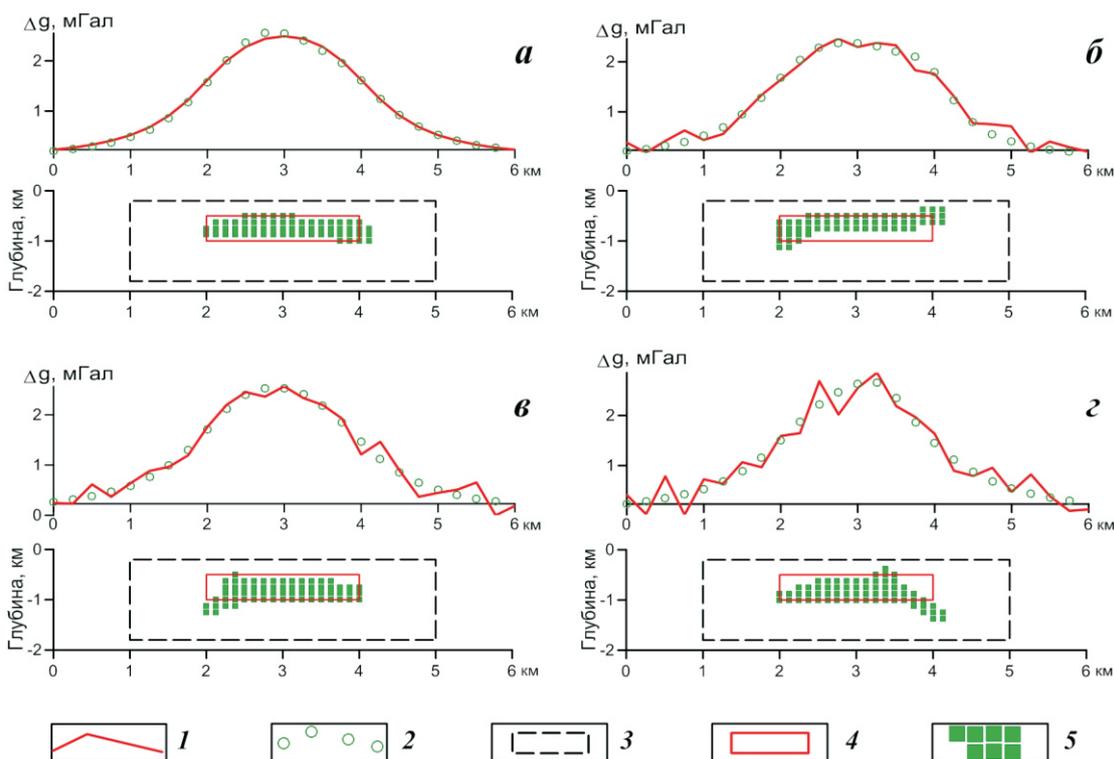
редь, обусловлена совершенно не характерным для «классических» методов теории решения ОЗГ приемом, когда критерий остановки итерационного процесса минимизации функции (в нашем случае – невязки) не привязан, собственно говоря, к последовательности значений этой функции, достигнутых в ходе этого процесса.

Рассмотрим еще одну модификацию монтажного метода – регулируемую направленную перекристаллизацию (РНП). В рамках данной модификации на отдельно взятой итерации возможно как увеличение, так и уменьшение ранее построенной конфигурации  $\Omega^i$  за счет добавления или удаления одного (или даже одновременно нескольких) элементов замощения  $\omega_\alpha$  из  $O[\Omega]$  или  $L[\Omega]$  соответственно. В процессе программной реализации алгоритм РНП был дополнен возможностью работы на сетках разного размера (масштаба).

Авторы провели сравнительный анализ трех модификаций монтажного метода (РНК, РНР и РНП на сетках разного масштаба) на модельных примерах. В качестве «наблюдаемого» поля было выбрано гравитационное поле  $\Delta g$  призмы, обладающей избыточной плотностью  $0.2 \text{ г/см}^3$ ; поле призмы вычислялось с шагом 250 м в 25 точках профиля, диапазон изменения значений  $\Delta g$  составил 0.64–3.92 мГал. Область поиска решения (для варианта РНК и РНП на сетках разного масштаба) и начальная конфигурация (для варианта РНР) представляли собой прямоугольник размером  $4 \times 2.8 \text{ км}$ , внутри которого находился аномалиеобразующий объект. Размер элемента замощения был принят равным  $1/8$  шага сети



**Рис. 6.** Объемная модель древней коры выветривания (а), построенная по результатам количественной интерпретации гравитационного поля и сечения этой модели плоскостями  $Y = 1.36 \text{ км}$ ,  $Y = 3.20 \text{ км}$ ,  $Y = 5.18 \text{ км}$ ,  $Z = 0.61 \text{ км}$  (б).

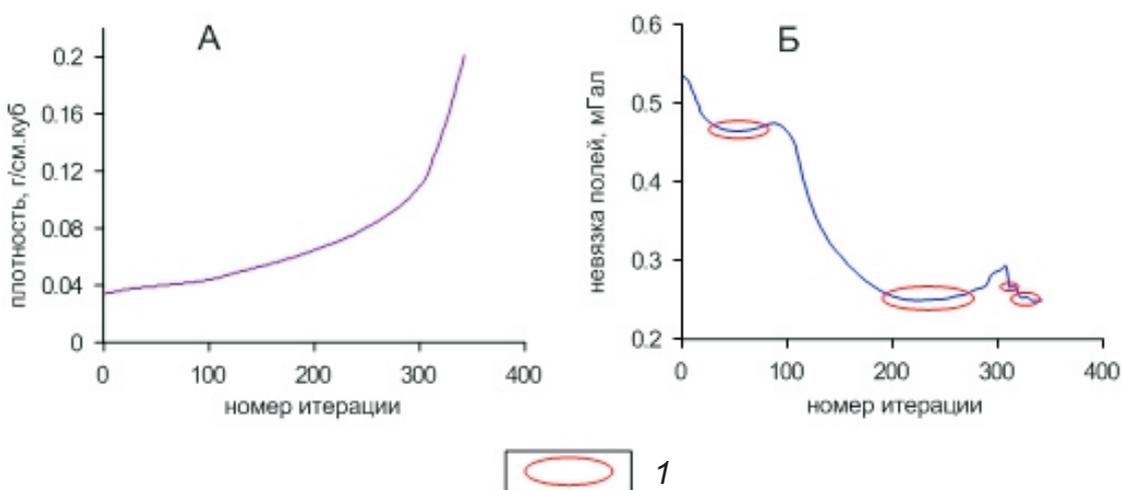


**Рис. 7.** Результаты применения РНР при решении обратной задачи для прямоугольной призмы при фиксированном размере элемента замощения  $L = 125$  м и различном уровне помех  $\delta g$  в «наблюденом» поле  $\Delta g$ : *a* – без помех; *б* – низкий; *в* – средний; *г* – высокий. 1 – «наблюденное» поле; 2 – модельное поле; 3 – начальная конфигурация  $\Omega^0$ ; 4 – аномалиеобразующее тело  $\Omega^T$ ; 5 – подобранная конфигурация  $\Omega^*$ .

**Таблица 1.** Характеристики решений ОЗГ для прямоугольной призмы с помощью алгоритма РНР.

Решения по полю, осложненному помехой			Решения по точным значениям поля		
Уровень помех, %	Число итераций N	Точность решения, мГал	Размер элемента замощения, м	Число итераций N	Точность решения, мГал
0	346	$\pm 0.044$	31.25	5816	$\pm 0.002$
5	345	$\pm 0.150$	62.5	1500	$\pm 0.005$
10	341	$\pm 0.159$	125	366	$\pm 0.044$
20	342	$\pm 0.249$	250	104	$\pm 0.150$

Примечание: точность решения – расхождение «наблюденного» и модельного полей в евклидовой метрике  $\epsilon$ .



**Рис. 8.** Характеристики итерационного процесса для решения обратной задачи по осложненному интенсивной помехой полю: *a* – изменение плотности подбираемого объекта; *б* – изменение невязки исходного и модельного полей (в евклидовой метрике); 1 – локальные минимумы целевой функции.

задания поля, в случае модификации РНП на сетках разного масштаба этот размер был принят как конечно заданный размер монтажного элемента. Все решения ОЗГ сведены в табл. 2.

Отметим, что при одинаковых элементах замощения  $\omega_\alpha$  все модификации монтажного метода обеспечивают достижение близких значений невязки «наблюдённого» и модельного полей при числе итераций  $N$ , обратно пропорциональном размеру  $\omega_\alpha$ . Число итераций  $N$  для РНП существенно зависит от размера начальной конфигурации  $\Omega^0$  и для разных соотношений площадей фигур  $\Omega^0 / \Omega^*$  может быть различным. Модификация РНП может иметь определенные технологические преимущества перед модификацией РНК при моделировании эшелонированных по вертикали геоплотностных неоднородностей, локализованных в определенных горизонтах геологического разреза. Приуроченность этих неоднородностей к определенным слоям или структурам определяется уже на начальной стадии, при построении начальных («стартовых») конфигураций  $\Omega^0$ . При решении задач большой размерности целесообразно использовать наиболее быстродействующую модификацию монтажного метода – РНП на сетках разного масштаба.

Для решения ОЗМ с использованием представленных выше алгоритмов применительно к одиночным объектам достаточно заменить процедуру вычисления гравитационного эффекта от единичного элемента замощения  $\omega_\alpha$  на вычисление магнитного поля  $\Delta Z$  или  $\Delta T$  при заданных значениях вектора намагниченности.

#### ЛОКАЛИЗАЦИЯ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ

В математике обратные задачи подразделяются на линейные и нелинейные в соответствии с типом оператора прямой задачи (Старостенко, 1978; Тихонов и др., 1995). В геофизике к линейным обратным задачам обычно относят те, в которых оценке подлежат физические характеристики изучаемых геологических объектов, а к нелинейным – обратные задачи, в которых искомыми являются их геометрические параметры (Блох, 1998; Булах, 2010).

Попытки создания алгоритмов решения обратных задач с неполной априорной информацией, как о геометрических, так и о физических параметрах аномалиеобразующих тел (будем называть такие задачи смешанными) на основе классических методов условной минимизации, предпринимались ранее (Майер и др., 1985). Было выявлено, что такие алгоритмы не в состоянии учесть весь объем априорной информации,

имеющейся в распоряжении интерпретатора. Известные автоматизированные технологии интерпретации гравиметрических и магнитных данных в смешанных постановках (Булах, 2010) представляют собой крупноблочные итерационные схемы, в которых процедура уточнения физических параметров (при закрепленных геометрических параметрах) и процедура уточнения геометрических параметров (при фиксированных физических параметрах) поочередно сменяют друг друга.

Авторами предлагается не практиковавшийся ранее подход к совместной оценке физических и геометрических параметров геологических объектов по результатам измерений гравитационного (магнитного) поля. В его основе лежит идея модификации монтажного метода решения нелинейной обратной задачи «рудного» типа за счет замены предположения об известных точных значениях плотности (намагниченности) тел на более слабое условие, по которому информация о петрофизических параметрах носит размытый характер, что, как отмечалось, в большей степени отвечает реальным геолого-геофизическим условиям.

Как известно, горные породы представляют собой сложные гетерогенные образования, а сложенные ими геологические тела являются, по современным представлениям (Кобрунов, 2008), неоднородными по физическим характеристикам мультифрактальными объектами – плотностные и магнитные характеристики однородных по вещественному составу объектов далеко не всегда являются константами. Так, например, намагниченность однородных по составу магнитовозмущающих тел, обладающих высокой магнитной восприимчивостью, зависит от их формы и может быть различной для отдельных фрагментов таких тел (Миков, 1975). Иначе говоря, в реальных условиях интерпретации неопределенность значений физических параметров – это обязательный атрибут любой постановки обратной задачи, даже если сами значения физических параметров при этом играют роль мешающих факторов. Постоянную плотность (намагниченность), фигурирующую во многих известных постановках обратных задач, следует, скорее всего, рассматривать как некое условное «среднее» значение физического параметра, порождающее приблизительно то же самое поле, что и неизвестное истинное. Существование такого «среднего» значения обеспечивает фактор  $\varepsilon$ -эквивалентности. Но если подобная идеализация и допустима, то безошибочно установить априори это «среднее» значение невозможно по нескольким причинам, в числе которых различие физических свойств горных пород, определенных на образцах и в

**Таблица 2.** Характеристики решений ОЗГ с помощью алгоритмов РНК, РНРК, РНП на сетках разного масштаба.

Наименование модификации	Число итераций, N	Размер начального элемента замощения (конечного), м	Продолжительность вычислительного процесса, сек	Точность решения, мГал
РНК	2051	31.25	11	±0.0019
РНР	9653	31.25	89	±0.0035
РНП на сетках разного масштаба	308	125 (31.25)	9	±0.0033

Примечание: точность решения – расхождение «наблюденного» и модельного полей в евклидовой метрике  $\epsilon$ .

естественном залегании (Вахромеев, Давыденко, 1987). Можно добавить, что в настоящее время в России резко уменьшились объемы буровых работ и петрофизических исследований, что, естественно, в значительной мере сократило объем априорной информации. Таким образом, отказ от предпосылки об известных точных значениях физических параметров следует рассматривать как, едва ли не обязательный, элемент любой постановки обратной задачи, претендующей на адекватность реалиям геофизической практики.

Пусть аномалия гравитационного поля  $\Delta\tilde{g}$  задана своими приближенными значениями  $\Delta\tilde{g}_i = \Delta\tilde{g}(X_i) + \xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , на множестве точек  $X_i$  произвольного рельефа и обусловлена массами, распределенными с избыточными плотностями  $\delta_k > 0$  по  $K$  связным односвязным объемам (парциальным носителям)  $\tilde{S}_k$ , а априорные сведения о свойствах помех  $\xi_i$ , векторе плотностей  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_K)$ , пространственном расположении и геометрии тел  $\tilde{S}_k$  содержат неопределенность, свойственную практически постановкам задач количественной интерпретации геофизических данных. Точные значения  $\delta_k$  плотностей неизвестны, однако с высокой степенью достоверности можно задать диапазоны их возможных значений:  $\delta'_k \leq \delta_k \leq \delta''_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ . Для решения ОЗГ в смешанной постановке создан экономичный адаптивный алгоритм, в котором условно-экстремальная задача решается лишь один раз. Введем в рассмотрение вспомогательный (опорный) вектор  $\lambda = (1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$ , определяющий очередность и направление разрастания ядер парциальных носителей  $\Omega_{k,j}^*$ . На каждой итерации  $j$  вектор  $\lambda$  подлежит корректировке, что служит признаком адаптивности предлагаемого алгоритма. В качестве  $\lambda_0$  можно взять вектор, компоненты которого принимают произвольные значения из интервалов  $[\delta'_k, \delta''_k]$ , например,  $\lambda_{k,0} = (\delta'_k + \delta''_k) / 2$ ,  $k = 2, 3, \dots, K$ . На каждом шаге  $j$  из числа допустимых пробных вариантов перехода от  $\Omega_{j-1}^*$  к  $\Omega_j^*$  выбирается тот, на котором достигается минимум функционала невязки

$$\Phi(\delta_1) = \sum_{i=1}^n \left( \Delta\tilde{g}(X_i) - \sum_{k=1}^K \Delta g(\Omega_{k,j}^*; X_i) (\lambda_{k,j} \delta_1) \right)^2$$

при условии, что плотность  $\delta_1$  тела  $\Omega_{1,j}^*$  является (единственным) свободным параметром, а плотности  $\delta_k$  других тел жестко связаны с  $\delta_1$  функциональной зависимостью  $\delta_k = \lambda_{k,j} \delta_1$  (здесь  $\Delta g(\Omega_{k,j}^*; X_i)$  – поле масс единичной плотности, распределенных по объему  $\Omega_{k,j}^*$ ). Предположим, что среди опробованных минимум  $\Phi(\delta_1)$  достигнут в некотором варианте  $\Omega_j^* = \{\Omega_{1,j}^*, \Omega_{2,j}^*, \dots, \Omega_{K,j}^*\}$  при  $\delta_k = \delta_{k,j}^*$ . Полагая, что  $\langle \{\Omega_{k,j}^*\}_{k=1}^K; \delta_{1,j}^* \rangle$  – не подлежащий пересмотру фрагмент  $j$ -го приближения к решению обратной задачи, берем в качестве оптимальных значений плотностей масс, заполняющих носители  $\Omega_{2,j}^*, \Omega_{3,j}^*, \dots, \Omega_{K,j}^*$ , значения  $\delta_k = \delta_{k,j}^*$ , минимизирующие функционал  $\Phi(\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_K) =$

$$\sum_{i=1}^n \left( \Delta\tilde{g}(X_i) - \left( \delta_{1,j}^* \Delta g(\Omega_{1,j}^*) + \sum_{k=2}^K \Delta g(\Omega_{k,j}^*; X_i) \delta_k \right) \right)^2$$

при ограничениях  $\delta_k'' \leq \delta_k \leq \phi_k(\delta_{1,j}^*)$ , где  $\phi_k$  – монотонно убывающие и непрерывные на интервале  $(-\infty, \delta_1'')$  функции, удовлетворяющие условию  $\phi_k(\delta_1'') = \delta_k''$ ;  $k = 2, 3, \dots, K$ , в случае  $\delta_{1,j}^* \geq \delta_1''$  и  $\delta_k' \leq \delta_k \leq \delta_k''$ ,  $k = 2, 3, \dots, K$ , в случае  $\delta_{1,j}^* \leq \delta_1'$ . Итерация завершается корректировкой опорного вектора для использования на следующей итерации  $\lambda_{k,j+1} = \delta_{k,j}^* / \delta_{1,j}^*$ ,  $k = 2, 3, \dots, K$ .

При обсуждении модельных примеров степень близости приближенного решения  $\langle \Omega^*, \delta^* \rangle$  к истинному  $\langle \tilde{S}, \tilde{\delta} \rangle$  будем характеризовать средним значением показателей точности  $\rho_k^{(S)}$ ,  $\rho_k^{(\delta)}$  оценивания парциальных носителей и плотностей, соответственно:

$$\rho^{(S,\delta)} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \rho_k^{(S,\delta)},$$

$$\rho_k^{(S,\delta)} = \sqrt{\rho_k^{(S)} \rho_k^{(\delta)}},$$

$$\rho_k^{(S)} = \mu(\tilde{S}_k \cap \Omega_k^*) / \mu(\tilde{S}_k \cup \Omega_k^*),$$

$$\rho_k^{(\delta)} = 1 - \left| \delta_k^* - \tilde{\delta}_k \right| / (\delta_k'' - \delta_k').$$

Глобальные и парциальные показатели являются нормированными величинами;  $[0,1]$  интервал их возможных значений, причем максимальное значение  $\rho^{(S,\delta)} = 1$  соответствует идеализированному случаю совпадения точного и приближенного решений.

Рассмотрим модельный пример: аномалия  $\Delta g$  обусловлена тремя однородными бесконечно протяженными призмами плотности которых:  $\bar{\delta}_1 = 0.2 \text{ г/см}^3$ ,  $\bar{\delta}_2 = 0.3 \text{ г/см}^3$ ,  $\bar{\delta}_3 = 0.5 \text{ г/см}^3$ , и задана своими точными значениями в  $n = 26$  точках оси  $x$  (рис. 9). Элементы замощения – квадраты со стороной 0.25 км. Задействовано большинство ограничений, перечисленных в постановке задачи. Считается известным, что  $K = 3$  и все три не соприкасающиеся друг с другом тела  $\bar{S}_k$  – односвязные связные области, заполненные массами избыточной плотности  $\bar{\delta}_1 \in [0.1; 0.3]$ ,  $\bar{\delta}_2 \in [0.1; 0.4]$ ,  $\bar{\delta}_3 \in [0.2; 0.7]$ . Предполагается, что возмущающие тела заключены в интервале глубин  $z = 1$  км и  $z = 12$  км. В качестве их априори известных фрагментов  $S_k^+$  выступают три элемента замощения  $T_n$  – по одному элементу на каждое тело (при реализации модифицированного алгоритма РНК они принимаются за центры кристаллизации).

Контроль за невязкой наблюдаемого и подобранного полей – это всего лишь косвенный способ оценки достигнутой невязки неизвестного точного и подобранного полей, которая и представляет основной интерес. В этом смысле результаты модельных расчетов, выполненные по точному полю и свободные от особенностей выборки случайных чисел, используемых при конструировании «наблюдаемого» поля, имеют свои преимущества. Все выводы в отношении возможностей алгоритма можно будет сделать, исходя из сравнения достигнутого значения невязки и предполагаемого уровня помех, которые могли бы содержаться в «измеренных» значениях поля.

Минимум невязки при решении обратной задачи по предложенному методу, достигнутый при плотностях  $\delta_1^* = 0.235 \text{ г/см}^3$ ,  $\delta_2^* = 0.106 \text{ г/см}^3$ ,  $\delta_3^* = 0.486 \text{ г/см}^3$  составляет  $\varepsilon = \pm 0.347$  мГал (при этом  $\rho^{(S,\delta)} = 0.486$ ), и это означает, что при интенсивности помех не менее 1.5% от максимального значения поля метод позволяет выйти на допустимое решение. Для сравнения, при заданных истинных значениях плотностей невязка составила 0.258 мГал, а точность решения обратной задачи  $\rho^{(S,\delta)} = 0.507$ . При ошибочно заданных значениях плотностей  $\bar{\delta}_1 = 0.3 \text{ г/см}^3$ ,  $\bar{\delta}_2 = 0.15 \text{ г/см}^3$ ,  $\bar{\delta}_3 = 0.4 \text{ г/см}^3$  невязка оказалась наименьшей из всех трех вариантов – 0.161 мГал, тогда как качество решения  $\rho^{(S,\delta)} = 0.403$  – наихудшее.

Дополнительные выводы можно сделать из анализа зависимостей, приведенных на рис. 10 (чтобы избежать необходимости введения логарифмических шкал, на графике не представлены результаты первых итераций, на которых плотности и невязка имеют достаточно высокие значения).

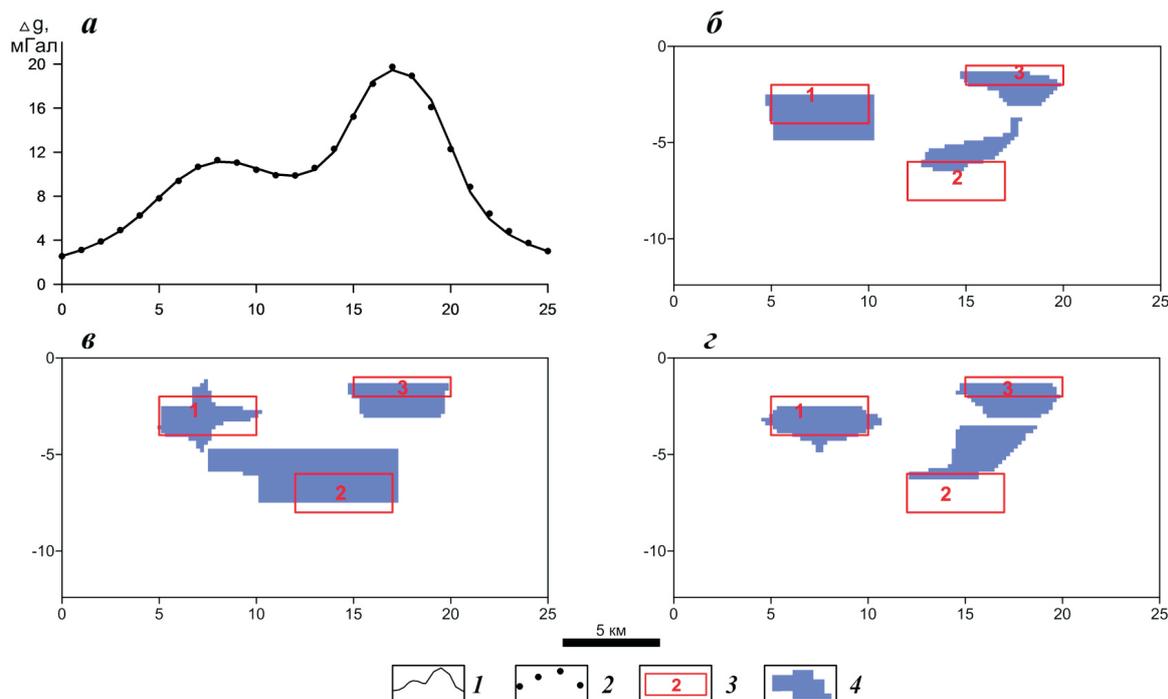
Следует отметить, что аналогичный алгоритм создан для решения ОЗМ (при амплитуде

аномалий  $\leq 5000$  нТл) и в нем вместо (скалярных) значений плотностей используются векторные характеристики эффективной намагниченности аномалиеобразующих тел (Новикова, Долгаль, 2012). Проиллюстрируем его возможности на практическом примере, связанном с изучением подводного вулкана 6.1 (Миронова), расположенного в пределах Охотоморского склона Курильской островной дуги (Блох и др., 2011, 2012; Подводный..., 1992).

Решение нелинейной ОЗМ осуществлялось по трем пересекающимся галсам (рис. 11а). Предварительно наблюдаемое геомагнитное поле  $\Delta T_a$  было преобразовано в вертикальную составляющую  $\Delta Z_a$  с помощью алгоритма истокообразной аппроксимации, при этом учитывались величина и направление вектора нормального поля  $T_0$  для региона исследований. Подбор конфигурации проводился монтажным методом в модификации РНК с размером элемента замощения 0.25 км, соответствующим среднему шагу измерений по профилю. В процессе подбора также осуществлялось уточнение намагниченности объекта и определение линейного регионального фона.

В результате моделирования удалось локализовать в пространстве субвертикальный конусовидный магнитовозмущающий блок, обладающий поперечными размерами от 0.5 км до 2.5 км (рис. 11б-г). Верхняя кромка этого блока находится на глубине около 2.5 км, нижняя – 15.5 км. Среднее значение намагниченности близко к 2 А/м для всех профилей. Максимальная невязка между модельным и наблюдаемым полями  $\pm 21.5$  нТл сопоставима с точностью гидромагнитной съемки. Следует отметить, что на всех профилях имеются остаточные положительные аномалии  $\Delta Z_a$ , связанные, вероятно, с влиянием периферийных магматических очагов. На основе результатов 2.5D моделирования путем интерполяции была построена объемная модель локализованного блока, отождествляемого с застывшей питающей системой вулкана.

Предложенный алгоритм позволяет строить допустимые решения при неполной априорной информации о геометрических и физических свойствах изучаемого объекта. Полученные результаты расчетов можно рассматривать и как предостережение от чрезмерной абсолютизации свойств «оптимальности» решений обратной задачи по критерию минимума невязки. Минимизация невязки в итерационных алгоритмах подбора должна использоваться для выхода в область допустимых решений обратной задачи, тогда как сам выбор допустимого решения, отвечающий минимуму невязки, должен рассматриваться просто как один из возможных.



**Рис. 9.** Результаты решения обратной задачи гравиразведки: при подбираемых значениях плотности тел: *a* – графики наблюдаемого и модельного полей; *б* – геоплотностной разрез; при фиксированных величинах плотности; *в* – отвечающих истинным; *г* – не отвечающих истинным значениям: 1 – график наблюдаемого поля; 2 – дискретные значения модельного поля; 3 – аномалиеобразующие тела, их номера; 4 – подобранные конфигурации.

## ОЦЕНКА СТЕПЕНИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИНТЕРПРЕТАЦИОННЫХ ПОСТРОЕНИЙ

Известно, что ОЗГ (как и ОЗМ) не имеет единственного решения: одному и тому же наблюдаемому гравитационному полю могут отвечать различные варианты пространственного распределения геоплотностных неоднородностей. Следовательно, достоверность местонахождения аномалиеобразующих объектов в тех или иных областях геологического пространства не может быть охарактеризована по отдельному частному решению ОЗГ. Для оценки степени неопределенности интерпретационных построений и повышения точности локализации источников необходимо рассматривать не одно решение ОЗГ, а все множество этих решений (которое в общем случае является бесконечным). В классе конфигурационных носителей масс можно построить конечное множество допустимых решений ОЗГ, удовлетворяющих заданной невязке полей  $\varepsilon$ , то есть серию различных конфигураций  $\Omega$ .

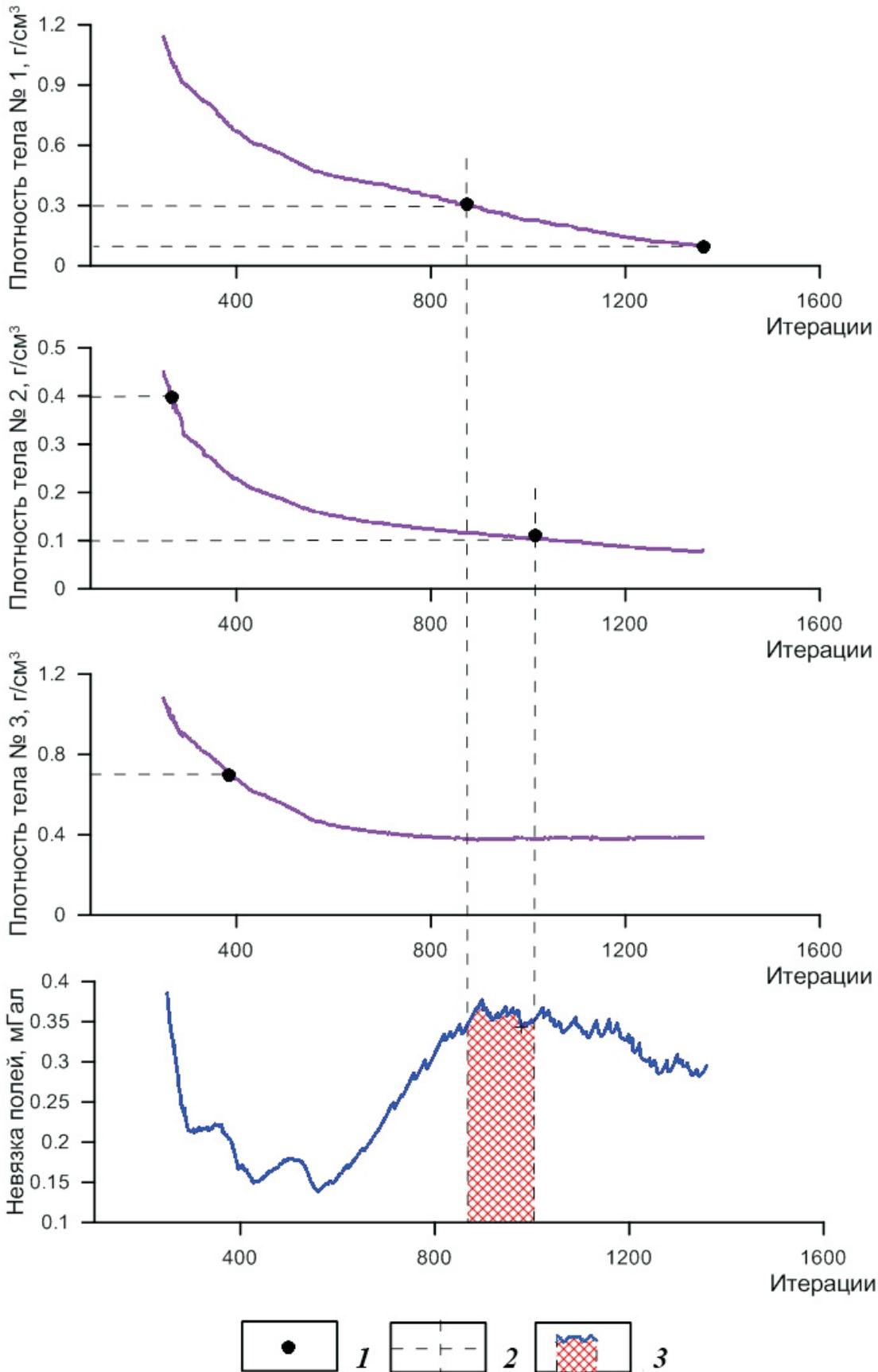
Впервые предложение о поиске содержательных инвариантов на этом множестве было выдвинуто в работе (Балк, 1980).

Рассмотрим множество  $Q = Q(\varepsilon)$  допустимых решений ОЗГ в классе конфигурационных носителей и два его подмножества:  $D_1 = \bigcup_{\Omega_m \in Q} \Omega_m$ , содержащее все возможные решения обратной

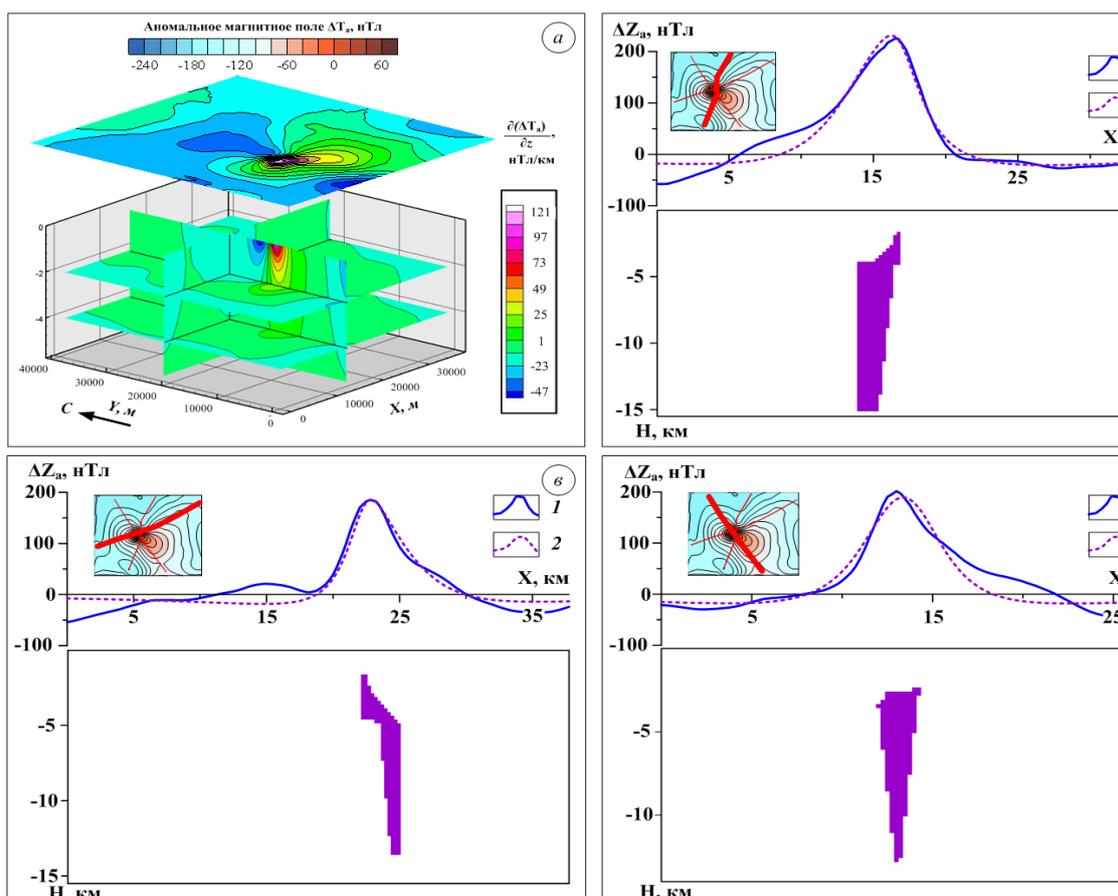
задачи («объединение решений») и  $D_2 = \bigcap_{\Omega_m \in Q} \Omega_m$ , содержащее фрагменты источников, принадлежащие искомым объектам для всей совокупности решений («пересечение решений»). Множество «пересечения решений»  $D_2$  будет давать фрагмент, гарантировано принадлежащий возмущающему объекту  $S^T$ , а множество «объединения решений» позволяет оконтурить область пространства  $D_1$ , в котором может содержаться искомый объект  $S^T$ :  $D_2 \subset S^T \subset D_1$ .

В методе РНК, используя разные начальные приближения («центры кристаллизации»), можно построить конечную представительную выборку решений ОЗГ, являющуюся, с точки зрения проблемы построения пары множеств  $D_1$  и  $D_2$ , исчерпывающей характеристикой всего множества решений ОЗГ (Балк, 1980, 2000, 2002, 2009; Балк, Долгаль, 2010).

На рис. 12 приведены результаты решения обратной задачи гравиразведки по данным гравиметрической съемки 1:50 000 масштаба, выполненной над месторождением медно-никелево-платиновых руд Норильск-1. В основу модели среды положены следующие допущения: аномалия в основном обусловлена рудоносной интрузией базит-гипербазитового состава, обладающей избыточной плотностью (по отношению к вмещающим породам трапповой формации)  $0.2 \text{ г/см}^3$ . С помощью монтажного метода при



**Рис. 10.** Графики изменения плотности тел и невязки полей в процессе решения обратной задачи: 1 – граничные точки интервалов допустимых изменений плотности; 2 – соединительные линии; 3 – область допустимых решений обратной задачи, внутри которой плотности всех призм не выходят за пределы заданных значений и невязка полей не превышает 0.4 мГал.



**Рис. 11.** Наблюдаемое магнитное поле подводного вулкана б.1 (а) и результаты решения обратной задачи магниторазведки монтажным методом для трех галсов (б-г): 1 – исходное поле; 2 – модельное поле; 3 – аномалиеобразующий объект.

различных центрах кристаллизации (начальных приближениях) было построено около 400 различных вариантов конфигурационных распределений масс, удовлетворяющих априорным допущениям. Их синтез позволил выделить область  $D_2$  (рис. 12), с высокой степенью достоверности принадлежащий источнику аномалии при предполагаемом уровне помех  $\varepsilon = \pm 0.15$  мГал (что примерно отвечает точности выполненной гравиметрической съемки). Смещение этой области в верхнюю часть разреза (относительно фактического положения рудоносной интрузии) связано с неучтенным ореолом уплотнения вмещающих эффузивных пород, что весьма характерно для надинтрузивных зон месторождений Норильского района.

Выше представленный подход к оценке достоверности результатов количественной интерпретации данных гравиразведки первоначально был программно реализован с использованием системы объектно-ориентированного программирования Delphi 7.0 для Windows. В этой последовательной программе вычисления осуществлялись на одном вычислительном ядре процессора, что приводило к ощутимым временными затратами. Для построения пары множеств  $D_1$  и  $D_2$  требуется найти сотни, а ино-

гда – тысячи допустимых решений ОЗГ. Время последовательного счета даже в 2D-варианте с использованием одного процессора типа Intel Core обычно составляет при 100-150 точках задания поля и всего одном возмущающем объекте более часа, а в отдельных случаях (при задачах большой размерности) – сутки и более.

При решении подавляющего большинства практических задач в 2D, а тем более 3D-варианте требуется применение высокопроизводительных вычислений. Решено было использовать распределенные вычисления на высокопроизводительных кластерах, которые обычно эффективны для решения сложных в вычислительном плане задач, не требующих интенсивного обмена информацией между параллельными подзадачами (Балк и др., 2010). Для реализации этих вычислений были использованы средства распределенной вычислительной инфраструктуры программы «Университетский кластер» («УК») (официальный сайт программы – <http://unicluster.ru>).

Поскольку в настоящее время на высокопроизводительных многопроцессорных системах операционная система Linux установлена значительно чаще, чем Windows, важно было обеспечить возмож-

ность использования компьютеров с различными операционными системами, для чего была создана переносимая программная реализация алгоритма оценки достоверности решения ОЗГ в 2D-варианте. Для этой цели использовался кроссплатформенный компилятор FreePascal Compiler и совместимая с ним среда разработки Lazarus.

«Parallel Compute: MPI» – сервис уровня инфраструктуры Программы «УК», который обеспечивает разработку и выполнение MPI-программ для вычислительных систем с распределенной памятью. Практически на всех высокопроизводительных вычислительных кластерах уже установлена параллельная коммуникационная библиотека стандарта MPI. Поэтому предложена схема распараллеливания вышеуказанной программы на основе стандарта MPI.

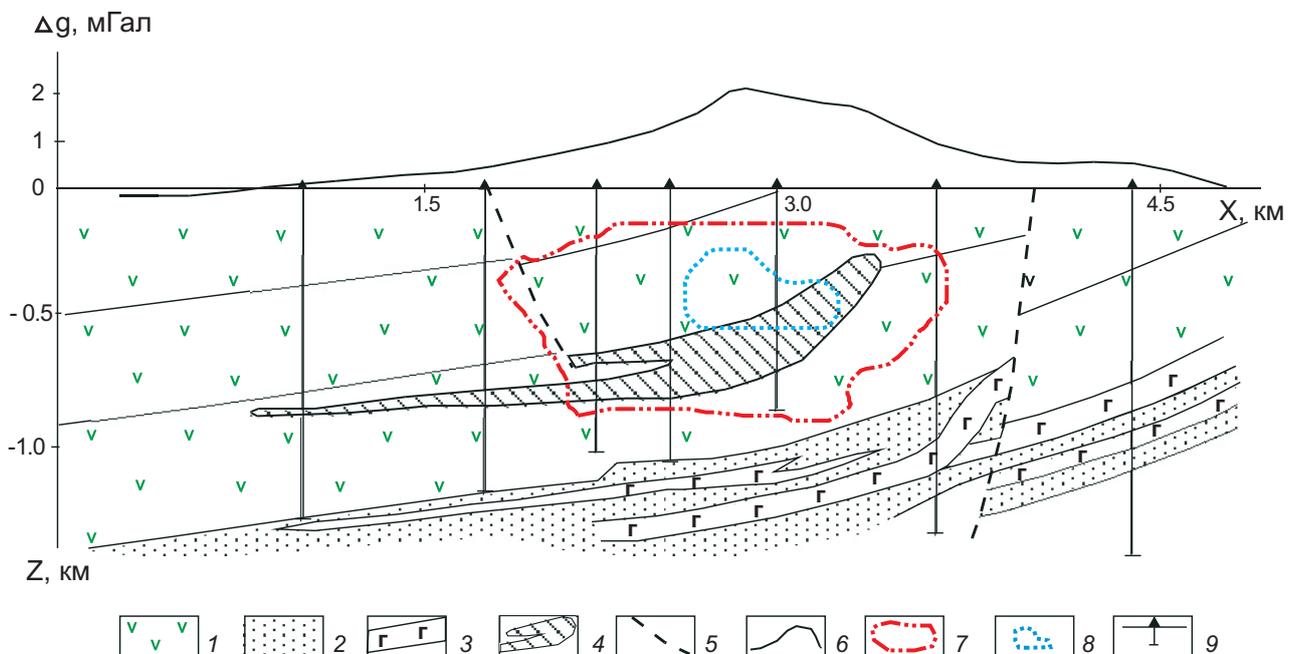
Одной из характеристик эффективности параллельного алгоритма является ускорение – отношение между временем выполнения задания с данными размера  $m$  асимптотически оптимальным последовательным алгоритмом и временем выполнения того же задания параллельным алгоритмом на машине с  $p$  процессорами. Для априорной оценки ускорения была применена сетевая формула Амдала, которая учитывает потери времени на межпроцессорный обмен данными в параллельном приложении

$$S_p(m) = \frac{1}{D + f + (1-f)/p}, \text{ где } f = f(n) - \text{доля}$$

последовательных операций,  $D = D_{alg} D_{tech}$  – коэффициент сетевой деградации. При этом  $D_{alg}$  определяет алгоритмическую составляющую коэффициента деградации, обусловленную свойствами алгоритма, а  $D_{tech}$  – техническую составляющую, зависящую от соотношения технического быстродействия процессора и аппаратуры сети. Далее,  $D_{alg} = W_{comm}/W_{comp}$ , где  $W_{comm}$  – количество операций передачи данных, а  $W_{comp}$  – количество вычислительных операций.  $D_{tech} = t_{comm}/t_{comp}$ , где  $t_{comm}$  – среднее время выполнения одной операции передачи данных,  $t_{comp}$  – среднее время одной вычислительной операции.

Рассмотрена типичная 2D-задача размером  $m = 19200$  монтажных элементов. Оценено соответствующее типичное соотношение последовательной и параллельной части алгоритма  $f = 2,8 \cdot 10^{-5}$ . На учебном вычислительном кластере компьютерного центра механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета был оценен соответствующий коэффициент сетевой деградации  $D = p \cdot 1,9 \cdot 10^{-6}$ .

Полученная оценка показывает, что применение высокопроизводительных вычислительных кластеров позволяет кардинально снизить время расчета. В результате распараллеливания программы время решения типичной задачи удастся существенно сократить (в рассмотренном случае примерно в 340 раз при числе используемых процессоров 512). Следует учитывать, что



**Рис. 12.** Результаты интерпретации гравитационного поля месторождения медно-никелево-платиновых руд Норильск-1: 1 – породы туфовой толщи; 2 – отложения тунгусской серии; 3 – sillы габбро-долеритов; 4 – рудоносная интрузия; 5 – дизъюнктивные нарушения; 6 – локальная составляющая наблюдаемого поля; 7 – часть пространства  $D_p$ , содержащая все возможные источники аномалии; 8 – фрагмент аномалиеобразующего объекта  $D_2$ ; 9 – буровые скважины.

дальнейшее увеличение количества задействованных вычислительных узлов (процессоров) сверх оптимального лишь замедляет работу программы, так как накладные расходы на передачу информации между узлами сети начинают превосходить выигрыш за счет распараллеливания (рис. 13). Поэтому априорную оценку ускорения полезно использовать для рационального выбора количества вычислительных узлов кластера, используемых при решении ОЗГ.

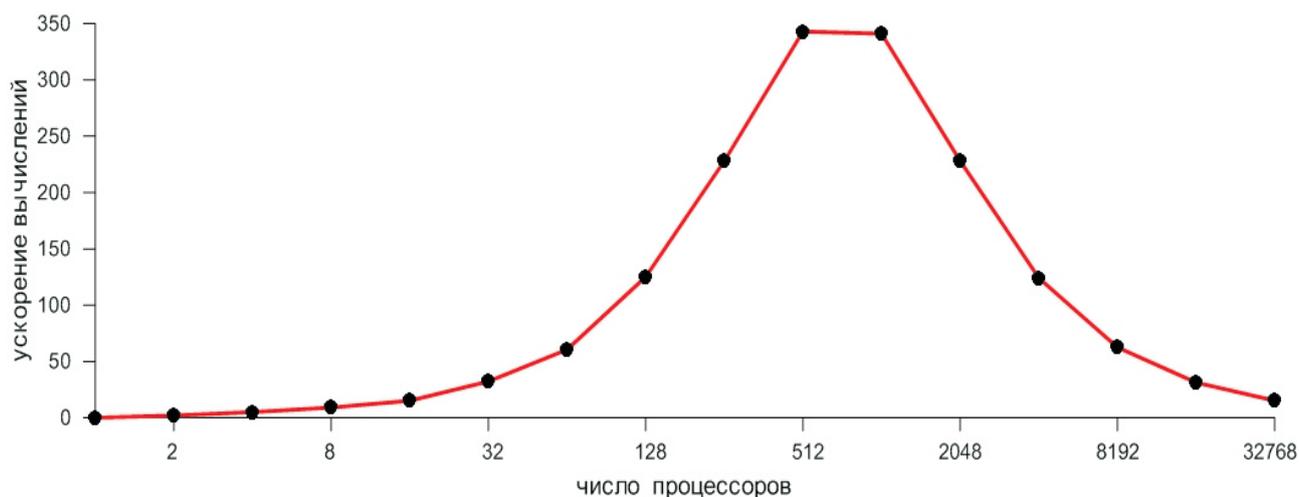


Рис. 13. Зависимость ускорения вычислительного процесса от количества используемых процессоров.

## ВЫВОДЫ

При количественной интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки могут эффективно применяться монтажные технологии решения обратных задач, базирующиеся на МКЭ. В основе проблемно ориентированных технологий лежит традиционное для геотектоники представление о геологическом пространстве как совокупности элементарных объемов с кусочно-однородным распределением характеристик  $U$  (в нашем случае — плотности или намагниченности) горных пород  $U = U(x, y, z)$  (Косыгин, 1974).

Как и все известные методы минимизации, монтажный метод не решает проблемы глобального минимума. Но следует учесть тот факт, что нахождение глобального минимума невязки не должно являться самоцелью уже хотя бы потому, что допустимое решение обратной задачи, отвечающее этому минимуму, не обязательно несет наиболее полную и качественную геолого-геофизическую информацию о строении изучаемой среды. От алгоритма минимизации требуется в действительности только одно: обеспечить допустимое значение невязки (если, конечно, такое возможно в рамках принятой интерпретационной модели) при соблюдении всех априорных ограничений. Будет ли это

локальный экстремум или какое-то «рядовое» значение минимизируемого функционала роли не играет.

Способность учесть все априорные физико-геологические сведения о моделируемых объектах и обеспечить при этом выход на допустимое значение невязки за приемлемое число итераций — это и должно стать основным критерием состоятельности алгоритма решения обратной задачи. Монтажные алгоритмы решения не-

линейных обратных задач в достаточно полной мере отвечают такому критерию и по ряду основных признаков их можно рассматривать как принципиально новую генерацию методов минимизации, используемых в геофизике при изучении формы и пространственного положения источников поля.

Принципиальный прорыв в вопросе наиболее полного извлечения достоверной информации из результатов измерений гравитационных и магнитных полей, по мнению авторов, удастся достичь тогда, когда построение отдельных приемлемых вариантов интерпретации станет элементом общей технологии, реализующей концепцию гарантированного подхода и заключающейся в поисках геологически содержательных инвариантов на множестве допустимых решений обратной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-05-00414 и 12-05-00156).

## Список литературы

- Аронов В.И.* Обработка на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений. М.: Недра, 1976. 131 с.
- Балк П.И.* О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных

- аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980. № 6. С. 43-57.
- Балк П.И.* Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии // ДАН. 1989. Т. 309. № 5. С. 1082-1084.
- Балк П.И.* Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии в рамках монтажного подхода // Физика Земли. 1993. № 5. С. 59-71.
- Балк П.И.* Столкновение геофизических и математических интересов – главный источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Геофизический журнал. 2000. Т. 22. № 4. С. 3-20.
- Балк П.И.* Математический формализм и невосребованные идеи в теории интерпретации потенциальных полей // Геофизика. 2002. № 2. С. 41-46.
- Балк П.И.* Содержательная оценка  $\varepsilon$ -эквивалентности в нелинейных обратных задачах гравиметрии // Геофизический журнал. 2009. Т. 31. № 6. С. 55-61.
- Балк П.И., Балк Т.В.* Структурно-рудная обратная задача гравиметрии // Физика Земли. 1995. № 6. С. 32-41.
- Балк П.И., Балк Т.В.* Совмещенная обратная задача грави- и магнитометрии // Физика Земли. 1996. № 2. С. 16-30.
- Балк П.И., Балк С.П.* О решении нелинейной обратной задачи гравиметрии с использованием конечноэлементных представлений источников поля // ДАН. 2000. Т. 371. № 2. С. 231-234.
- Балк П.И., Деменев А.Г., Долгаль А.С. и др.* Эффективность применения многопроцессорных вычислительных систем с целью оценки достоверности решения обратной задачи гравиметрии // Вестник Пермского университета. Сер. Геология. 2010. Вып. 1(9). С. 50-57.
- Балк П.И., Долгаль А.С.* Трехмерные монтажные технологии интерпретации гравиметрических данных // ДАН. 2009. Т. 427. № 3. С. 380-383.
- Балк П.И., Долгаль А.С.* Детерминированный подход к проблеме достоверности результатов интерпретации гравиметрических данных // ДАН. 2010. Т. 431. № 1. С. 334-338.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А.* Теория и опыт применения монтажного подхода к решению трехмерных обратных задач гравиметрии // Геофизический журнал. 2009. № 5. Т. 31. С. 128-140.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А.* Синтез линейной и нелинейной постановок обратной задачи в гравиразведке и магниторазведке // Геофизический журнал. 2011. № 5. Т. 33. С. 51-65.
- Блох Ю.И.* Количественная интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. М.: МГГА, 1998. 88 с.
- Блох Ю.И., Бондаренко В.И., Долгаль А.С. и др.* Геофизические исследования подводного вулкана 6.1. (Курильская островная дуга) // Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей: Материалы 38-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского, Пермь, 24-28 января 2011 г. Пермь: ГИ УрО РАН, 2011. С. 32-35.
- Блох Ю.И., Бондаренко В.И., Долгаль и др.* Комплексные геофизические исследования подводного вулкана 6.1, Курильская островная дуга // Геофизика. 2012. № 2. С. 58-66.
- Булах Е.Г.* Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наукова думка, 2010. 463 с.
- Булах Е.Г., Корчагин И.Н.* О подборе аномальных источников гравитационного поля методом последовательных приращений модели // ДАН УССР. Сер. Б. 1978. С. 1059-1062.
- Вахромеев Г.С., Давыденко А.Ю.* Моделирование в разведочной геофизике. М: Недра, 1987. 192 с.
- Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Мудрецовоу Е.А., Веселова К.Е. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1990. 607 с.
- Долгаль А.С.* Решение обратной задачи гравиразведки при поисках медно-никелевых руд // Геофизический журнал. № 6. 1993. С. 83-88.
- Долгаль А.С., Мичурин А.В.* Новая модификация монтажного метода решения нелинейной обратной задачи гравиметрии // Уральский геофизический вестник. 2010. № 2 (17). С. 34-40.
- Долгаль А.С., Мичурин А.В., Новикова П.Н. и др.* Новые направления развития монтажных технологий решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии // Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей: Материалы 38-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского, Пермь, 24-28 января 2011 г. Пермь: ГИ УрО РАН, 2011. С. 100-103.
- Долгаль А.С., Пугин А.В.* Построение аналитических аппроксимаций геопотенциальных полей с учетом их фрактальной структуры // ДАН. 2006. Т. 410. № 7. С. 1152-1155.
- Долгаль А.С., Симанов А.А.* Применение кратномасштабного вейвлет-анализа при аналитических аппроксимациях геопотенциальных полей // ДАН. 2008. Т. 418. № 2. С. 256-261.
- Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф.* Аналитическая истокообразная аппроксимация гравитационного поля, базирующаяся на методе конечных элементов // X Международная конференция

- «Геоинформатика: теоретические и прикладные аспекты», 10-13 мая 2011. Киев. Украина. А053. Электронная публикация (CD).
- Дядюра В.А., Шалаев С.В.* Определение местоположения локальных геологических объектов по гравитационным аномалиям // Вопросы разведочной геофизики. 1968. Вып. 8. С. 31-36.
- Завойский В.Н., Неисжал Ю.Е.* Декомпозиционно-итерационный метод решения обратной задачи магниторазведки // Геофизический журнал. 1979. Т. 1. № 12. С. 46-52.
- Кобрунов А.И.* Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пособие. М.: ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. 288 с.
- Косыгин Ю.А.* Основы тектоники. М.: Недра, 1974. 216 с.
- Ломтадзе В.В.* Интерпретация гравитационных аномалий способом эквивалентных призм // Вопросы разведочной геофизики. 1968. Вып. 8. С. 36-40.
- Майер В.И., Никонова Ф.И., Федорова Н.В.* Численная оптимизация при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. № 5. С. 46-57.
- Миков Д.С.* Методы интерпретации магнитных аномалий. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1975. 180 с.
- Новикова П.Н., Долгаль А.С.* Локализация геологических объектов и определение вектора намагниченности горных пород монтажным методом // Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей: Материалы 39-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского, Воронеж, 30 января – 2 февраля 2012 г. Воронеж: ВГУ, 2012. С. 205-207.
- Овчаренко А.В.* Подбор сечения двухмерного тела по гравитационному полю // Вопросы нефтяной и рудной геофизики. Алма-Ата: Изд-во Казахского политехн. ин-та, 1975. Вып. 2. С. 71-75.
- Перфильев Л.Г.* Некоторые вопросы обработки и интерпретации геолого-геофизических данных на ЭЦВМ. Автореф. дисс. канд. тех. наук. М., 1972. 28 с.
- Подводный вулканизм и зональность Курильской островной дуги / Отв. ред. Пушаровский Ю.М. М.: Наука, 1992. 528 с.
- Розин Л.А.* Стержневые системы как системы конечных элементов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 232 с.
- Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наук. думка, 1978. 228 с.
- Страхов В.Н.* Общая схема и основные итоги развития теории и практики интерпретации потенциальных полей в СССР и России в XX веке // Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке: Труды конференции. М.: ОИФЗ РАН, 1997. С. 98-120.
- Страхов В.Н.* Что делать? (о развитии гравиметрии и магнитометрии в России в начале XXI века). М.: ОИФЗ РАН, 1998. 24 с.
- Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э.* Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. М: ИФЗ РАН, 2009. 254 с.
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // ДАН. 1976. 227. № 2. С. 344-347.
- Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука. 1995. 312 с.
- Тригубович Г.М., Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г.* 3D-электроразведка становлением поля. Новосибирск: Наука, 2009. 218 с.
- Шалаев С.В.* Геологическое истолкование геофизических аномалий с помощью линейного программирования. Л.: Недра, 1972. 142 с.
- Шефер У., Балк Т.В.* Монтажный метод решения совмещенной обратной задачи гравиметрии и магнитометрии // ДАН. 1992. Т. 327. № 1. С. 79-83.
- Юньков А.А., Булах Е.Г.* О точности определения плотности аномальных масс методом сеток // ДАН УССР. 1958. № 11. С. 1234-1237.
- Schäfer U.* Die Lösung einer inversen Aufgabe für gravimetrische und geomagnetische Anomalien mittels der Montagemethode. Potsdam: Zentralinstitut für Physik der Erde, 1990. 137 s.
- Schäfer U., Balk P.* The Inversion of Potential Field Anomalies by the Assembling Method: The Third Dimension // Proc. IAG Symp. № 112. Geodesie and Pyusik of the Earth. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. P. 237-241.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
**THE FINITE-ELEMENT METHOD APPLICATION FOR  
INTERPRETATION OF GRAVITY AND MAGNETIC DATA**

**A.S. Dolgal<sup>1</sup>, P.I. Balk<sup>2</sup>, A.G. Demenev<sup>3</sup>, A.V. Michurin<sup>1</sup>, P.N. Novikova<sup>1</sup>, V.A. Rashidov<sup>4</sup>,  
L.A. Christenko<sup>1</sup>, A.F. Sharkhimullin<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Mining Institute of Ural branch of RAS, Perm, 614007; e-mail: dolgal@mi-perm.ru;*

<sup>2</sup>*Berlin, Germany;*

<sup>3</sup>*Permian State National Research University, Perm, 614990;*

<sup>4</sup>*Institute of Volcanology and Seismology FEB RAS, Petropavlovsk-Kamchatski, 683006*

In this paper we consider finite-element interpretation technologies of gravity and magnetic data which are used to construct sourcewise approximations of fields and to determine parameters of field sources. A new algorithm of sourcewise approximations of gravity field is described in the paper. The computation process suggests solution of series of problems of one-dimensional optimization resulting in good match of observed and modeled fields with the number of sources lesser than the number of field points. The main characteristics of assembly method for solution of inverse gravity problem and the computing circuit are represented in the article. We suggest a new method of calculation of reliability estimation for interpretation of constructions on the basis of guaranteed approach. A new algorithm for determination of configuration of anomalous objects on interval value assignment of rock density (magnetization) is introduced in the paper. The article shows that application of high-performance computer clusters is productive. Model and practical examples for modeling of sources of geopotential fields are described.

*Keywords: gravitational exploration, magnetic exploration, finite-element approach, assembly method, modeling, algorithm.*