

УДК 551.24

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВА ДЛЯ ТРЕЩИНЫ СДВИГА В НЕОДНОРОДНОМ НАЧАЛЬНОМ ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ

© 2012 А.С. Лермонтова

*Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта РАН, Москва, 123995; e-mail: asyal@pochta.ru*

Согласно различным полевым измерениям, смещения вдоль природных трещин в горных породах, как правило, происходят в условиях неоднородного напряженного состояния. В связи с этим в работе решается задача двумерной теории упругости о трещине сдвига в неоднородном поле напряжений. Приведены формулы для определения функции скачка смещений и параметров напряженного состояния в окрестности трещины для произвольных непостоянных вдоль трещины начальных условий. В качестве примеров вычисляются поля напряжений для различных случаев начального напряженного состояния. Показаны параметры напряженного состояния для случая субвертикальной трещины, когда в результате действия гравитации начальное сжатие возрастает с глубиной. Для горизонтальных поверхностных разломов предложенный метод позволяет считать функцию скачка смещений, если известно начальное напряженное состояние, и вклад от активизации разлома в напряженное состояние, если известна величина смещения берегов на протяжении разлома. Также приводится пример использования метода для нахождения напряженного состояния массива, содержащего несколько трещин, произвольным образом расположенных друг относительно друга и активизировавшихся поочередно.

*Ключевые слова:* напряженное состояние, упругость, трещина, сброшенные напряжения, скачок смещений.

### ВВЕДЕНИЕ

Горные массивы не представляют собой сплошную среду, а содержат участки пониженной прочности, или трещины. При изменении внешней нагрузки борта трещин могут смещаться. Смещение бортов, в свою очередь, влияет на поле напряжений в массиве. Поэтому возникает необходимость определения вклада от активизации конкретной трещины в общее напряженное состояние как при рассмотрении вопросов прочности горных массивов, так и в связи с изучением природных напряжений в сейсмоактивных областях.

В работе строится и обсуждается решение задачи двумерной теории упругости о нахождении напряженного состояния массива в окрестности одиночной трещины, смещение бортов которой произошло в условиях неоднородного исходного поля напряжений. Трещина возникает на месте дефекта – бесконечно узкого участка плоскости, обладающего пониженной прочностью на скалывание по сравнению с окружающим

материалом. При увеличении нагрузки либо при дальнейшем падении прочности (до некоторого критического значения) дефект преобразуется в трещину, берега которой перемещаются вдоль нее. Здесь рассматриваются прямолинейные трещины, поскольку введение в постановку задачи возможности изгибов повлечет значительное усложнение вычислений и должно являться предметом отдельной работы.

Мы рассматриваем случай только сдвиговых смещений, без отрывов, поскольку нормальные напряжения на трещине всюду предполагаем сжимающими. Ситуации, когда это условие не выполняется, должны оговариваться отдельно. Считается, что концы трещины, между которыми происходит относительное сдвиговое смещение ее бортов, не меняют своего положения, то есть трещина не увеличивает свою длину. Само смещение бортов именуется *активизацией* ранее существовавшей трещины, определившей наличие пониженных прочностных свойств среды в своей области. Конечное напряженное состояние массива, возникающее после акти-

визации одной или нескольких трещин, можно рассматривать как состояние непосредственно предшествующее возможному прорастанию концов трещины (трещин). Отметим, что в работе (Ребецкий, 2007б) исследовались условия прорастания концов трещины в линейно неоднородном поле начальных напряжений.

Начальное (в общем случае неоднородное) напряженное состояние, существовавшее до активизации трещины, считается заданным. Постановка задачи связана с заданием условия динамического контакта на плоскости трещины для конечного напряженного состояния, формирующегося в результате активизации трещины. Смещение бортов трещины является искомой функцией. Сведение подобного рода задач к решению сингулярного интегрального уравнения относительно функции скачка смещений (уравнение (3) настоящей работы) рассматривалось в книге (Ландау, Лившиц, 1954). Здесь мы приводим решение этого уравнения, пригодное для непосредственных вычислений, а также формулы, позволяющие перейти к нахождению собственно параметров напряженного состояния в каждой точке плоскости.

Решение строится в предположении, что смещение на трещине происходит с разной амплитудой одновременно на всем ее протяжении. В реальности, напротив, разрывы часто активизируются поэтапно, сначала на одном участке, потом на соседнем, и так далее (Борняков, Шерман, 2000; Саньков, Семинский 1988; Семинский, 2003; Шерман и др. 1988; Kim, Choi, 2007).

Решение аналогичной задачи для единичной трещины в случае однородного начального напряженного состояния представлено в работе (Осокина, Фридман, 1987), где исходное равномерное поле напряжений задается двумя главными напряжениями, действующими на всей плоскости, в любой точке под одинаковыми углами к трещине. В таком поле напряжений касательное напряжение, приложенное к бортам трещины, постоянно по всей ее длине. Полученное в указанной работе решение показывает, что в ситуации однородного начального поля напряжений смещение бортов максимально в середине трещины и симметрично уменьшается к ее концам, что соответствует данным экспериментов, проведенных в условиях однородного начального напряженного состояния (Осокина, Цветкова 1979). В данных условиях нагружения трещины теория предполагает, что достижение конечного смещения бортов трещины происходит с сохранением подобия формы эпюры смещения на всех стадиях процесса при увеличении амплитуды смещений от нуля до максимальных значений.

В тоже время полевые измерения (Кожурин, Стрельцов, 1995; Kim, Choi, 2007) говорят о

том, что природные трещины и разрывы могут вести себя иначе. Смещение берегов не всегда растет плавно от концов к середине, а может иметь несимметричную эпюру с максимумом, сдвинутым от середины к одному из его концов. Примером такой активизации крупного разрыва можно рассматривать Суматра-Андаманское землетрясение 26.12.2003, развитие которого началось с южного его конца вблизи о. Ниас и далее распространялось вдоль океанического желоба на север – северо-восток (Ammon et al., 2005; Lay et al., 2005). Амплитуды поддвигового смещения вдоль пологой (9–10°) плоскости, погруженной на восток – северо-восток под субконтинентальную плиту, были максимальны на участке между западным окончанием о. Суматра и Никобарскими островами и быстро затухали на север. Результаты тектонофизической реконструкции природных напряжений, существовавшие вдоль западного фланга Зондской дуги до этого катастрофического землетрясения, полученные при анализе механизмов очагов землетрясений с магнитудами 4.5–6.5 за период с 1978 по 2003 гг. (Ребецкий, Маринин, 2006), показали существенную его неоднородность.

Существуют также примеры достаточно беспорядочного изменения амплитуд смещений вдоль разрыва. Для Нефтегорского землетрясения 1995 г. относительные смещения бортов были измерены на всем протяжении разлома (Кожурин, Стрельцов, 1995). В работе (Choi et al., 2009) описан разлом, который можно условно поделить на сектора интенсивного смещения, чередующиеся с так называемыми зонами повышенного сцепления (linkage zones), где смещение минимально. Подобные эффекты могут быть связаны как с неоднородностью самой среды, содержащей трещину, так и с неравномерностью начального поля напряжений.

Данная работа представляет собой развитие метода Д.Н. Осокиной (1989), здесь предлагается решение для трещины в однородной среде, активизировавшейся при неоднородном начальном напряженном состоянии, а также, возможно, при неодинаковом коэффициенте трения скольжения по длине трещины. Для случая нескольких трещин, активизировавшихся последовательно, предлагаемый метод также дает решение, сколь угодно близкое к точному. Дело в том, что в последовательном случае нет необходимости решать систему уравнений. Вычислив поле напряжений после активизации первой трещины, мы можем непосредственно определить функцию сброшенных касательных напряжений на второй трещине, что позволяет нам вычислить поле напряжений после активизации второй трещины. А значит, таким же точно способом мы перейдем и к третьей трещине, и так далее сколько потребуется.

Преимущество данного метода по сравнению со всеми предыдущими решениями для совокупности трещин (Качанов, 2003; Лермонтова, Ребецкий, 2012; Ребецкий Лермонтова, 2010; Chinnery, 1961) в его регулируемой близости к точному решению. А именно, точность полученного решения зависит только от того, насколько точно мы приблизили параметры начального напряженного состояния на трещине.

Масштаб рассматриваемых объектов значения не имеет, требуется лишь правильно нормировать все величины на длину трещины или разлома. Однако метод применим далеко не всегда.

Во-первых, задача решена только для двумерного случая, что является существенным ограничением для использования описанного метода при моделировании трещины в пространстве. Если в направлении, перпендикулярном рассматриваемой плоскости, и сама трещина, и напряжения не меняются на достаточно большом расстоянии от плоскости, то можно говорить о применимости решения в данной плоскости.

Другой ограничивающий возможность использования решения фактор состоит в том, что в природе горные породы, как правило, не ведут себя как идеально упругая среда. Ввиду наличия в реальном массиве микротрещин (трещин меньших масштабных уровней), его реакция на нагрузки будет иметь скорее псевдопластический характер. Поэтому приведенный здесь метод требует доработки, и настоящую работу следует считать отправной в данном направлении исследований.

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Схема решения.** Пусть система координат на плоскости задана таким образом, что трещина длиной  $2L$  лежит на оси  $Ox$ , а середина трещины расположена в начале координат (рис. 1). Мы станем использовать также комплексные координаты  $z = x + iy$ .

Будем придерживаться схемы решения, предложенной в работе (Осокина, Фридман, 1987). Считается, что смещение берегов трещины происходит, если выполнено следующее условие начала активизации:

$$|\sigma_{xy}^0(x, 0)| \geq k_s(x, 0) |\sigma_{yy}^0(x, 0)| \text{ при } |x| \leq L, \quad (1)$$

где  $k_s$  – коэффициент статического поверхностного трения.

Смещение на трещине ищется через сброшенное касательное напряжение  $\Delta\tau(x)$ . Оно, в свою очередь, зависит от касательного  $\sigma_{xy}^0$  и нормального  $\sigma_{yy}^0$  начальных напряжений на тре-

щине в ее плоскости, а также от коэффициента кинематического трения  $k_k(x)$ :

$$|\Delta\tau(x)| = |\sigma_{xy}^0(x, 0)| + k_k(x) \sigma_{yy}^0(x, 0),$$

$$\text{sign}(\Delta\tau(x)) = \text{sign}(\sigma_{xy}^0(x, 0)) \text{ при } |x| \leq L. \quad (2)$$

Верхними индексами 0 мы обозначаем компоненты начального тензора напряжений  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{yy}^0$  и  $\sigma_{xy}^0$ , без верхних индексов – их конечные значения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ . Зная сброшенные касательные напряжения, можем найти функцию скачка смещений  $g(x)$  на трещине из уравнения

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \frac{g'(r)}{r-x} dr = \Delta\tau(x) \text{ при } |x| \leq L. \quad (3)$$

Для случая однородных начальных напряжений ( $\Delta\tau(x) \equiv \text{const}$ ) (Осокина, Фридман, 1987) получаем:

$$g(x) = \Delta\tau \sqrt{L^2 - x^2}. \quad (4)$$

Отсюда по формулам

$$\Phi(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{g'(r)}{r-z} dr, \quad (5)$$

$$\Psi(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-L}^L \left[ \frac{g'(r)}{r-x} \frac{dr}{(r-z)^2} + \frac{\bar{r}g'(r)}{(r-z)^2} dr \right]. \quad (6)$$

находятся выражения для комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили (Мухелишвили, 1966). После этого напряженное состояние в окрестности трещины определяется по формулам Колосова-Мухелишвили:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})] + \sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0, \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] + \sigma_{yy}^0 - \sigma_{xx}^0 + 2i\sigma_{xy}^0. \end{aligned} \quad (7)$$

**Решение для случая линейной функции сброшенных касательных напряжений.** В работе (Осокина, Фридман, 1987) рассмотрена ситуация однородной начальной нагрузки, при которой начальные напряжения, а значит, и сброшенное касательное напряжение, постоянны по всей длине трещины. Для того, чтобы обобщить при-

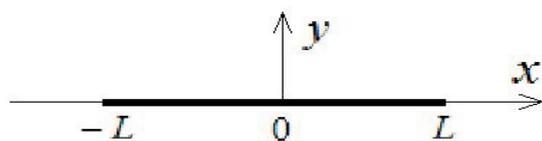


Рис. 1. Выбор системы координат.

веденное там решение на случай неоднородных начальных напряжений, изучим сперва наиболее простое обобщение.

Предположим, начальные напряжения  $\sigma_{xy}^0$  и  $\sigma_{yy}^0$  и коэффициент трения  $k_k$  изменяются вдоль трещины таким образом, что вычисленная по формуле (2) функция сброшенных касательных напряжений имеет вид

$$\Delta\tau(x) = Ax + B, \quad |x| \leq L, \quad (8)$$

где  $A, B$  – произвольные константы.

Решение уравнения (3) с правой частью вида (8) с учетом условия  $g(\pm L) = 0$  дает выражение для функции скачка смещений:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{L^2 - x^2}} \left( Ax^2 + Bx - \frac{AL^2}{2} \right), \quad |x| < L. \quad (9)$$

По формулам (5) и (6) найдем комплексные потенциалы:

$$\Phi(z) = \frac{i}{2} \left[ Az + B - (Az^2 + Bz - \frac{AL^2}{2}) \frac{1}{\sqrt{z^2 - L^2}} \right], \quad (10)$$

$$\Psi(z) = -\frac{i}{2} \left[ \frac{3Az + 2B - (4Az^2 + 3Bz - AL^2) \frac{1}{\sqrt{z^2 - L^2}}}{(Az^4 + Bz^3 - \frac{AL^2}{2}z^2) \frac{1}{(z^2 - L^2)^{3/2}}} \right]$$

После этого формулы (7) приводят к окончательному решению.

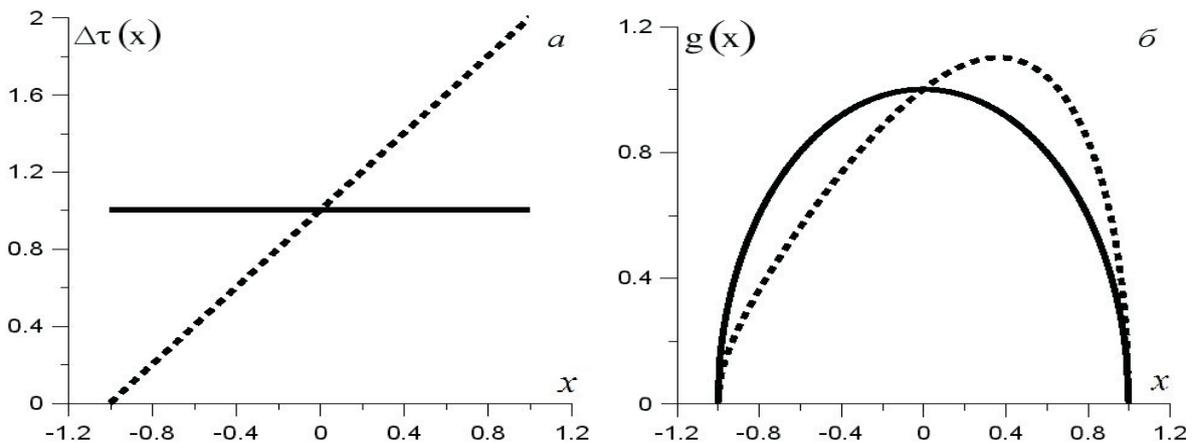
Чтобы наглядно представить разницу вновь полученного решения с решением для постоянного сброшенного напряжения, на рис. 2а приведены два примера графиков функций сброшенных касательных напряжений: постоянной

( $\Delta\tau(x) = 1$ ) и линейной ( $\Delta\tau(x) = x + 1$ ), а рядом на рис. 2б – полученные из них при помощи формулы (9) функции скачков смещений. График функции скачка смещений для постоянного  $\Delta\tau$  (рис. 2б) симметричен. При линейном  $\Delta\tau$  (рис. 2б) максимум смещения сдвинут от центра в сторону увеличения  $\Delta\tau$ .

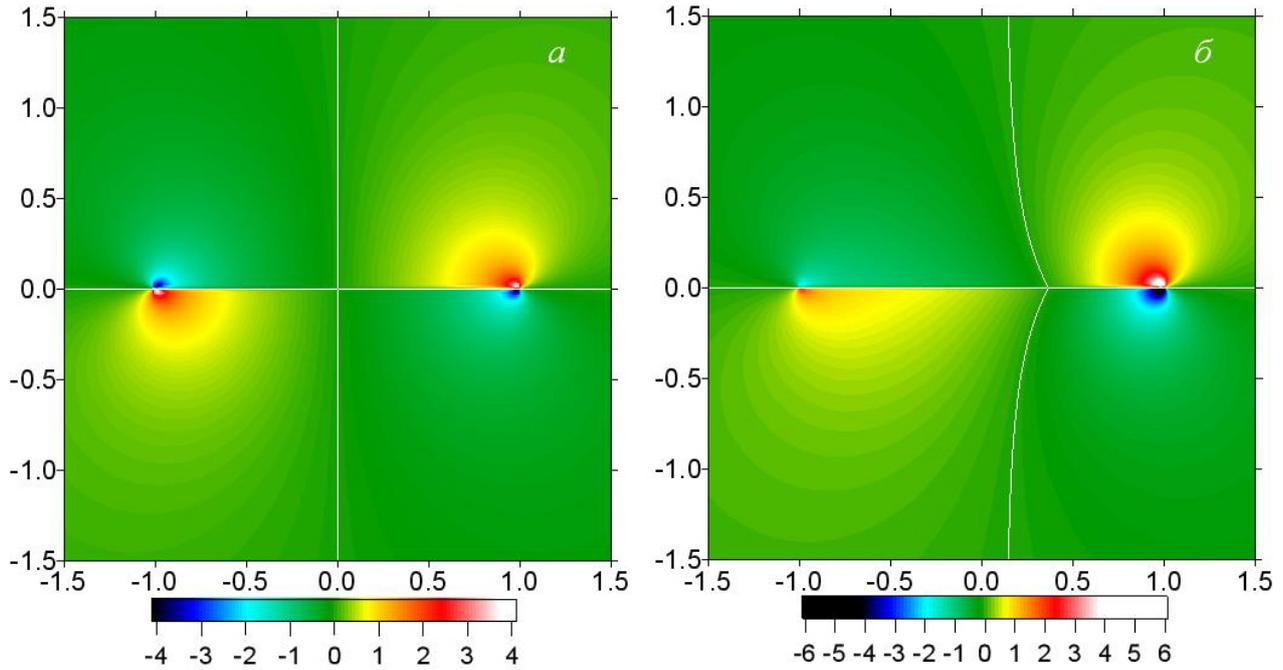
Для этих двух случаев на рисунке 3 показаны вычисленные по формулам (9), (10) и (7) распределения изменения всестороннего давления  $\Delta p = -(\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy})/2$ . На рис. 3а приведено  $\Delta p$  для постоянного сброшенного напряжения (рис. 2), на рис. 3б – для линейного (рис. 2). Обратим внимание, что в обоих примерах точка перемены знака  $\Delta p$  на берегах трещины совпадает с максимумом смещения (рис. 2б).

**Решение для общего случая произвольных неоднородных начальных напряжений.** Пусть теперь начальное напряженное состояние таково, что  $\sigma_{xy}^0, \sigma_{yy}^0$  и  $k_k(x)$  непрерывно меняются вдоль трещины произвольным образом, а значит, согласно (2), сброшенное касательное напряжение  $\Delta\tau(x)$  также представляет собой непрерывную функцию, зависящую от  $x$  при  $|x| \leq L$ .

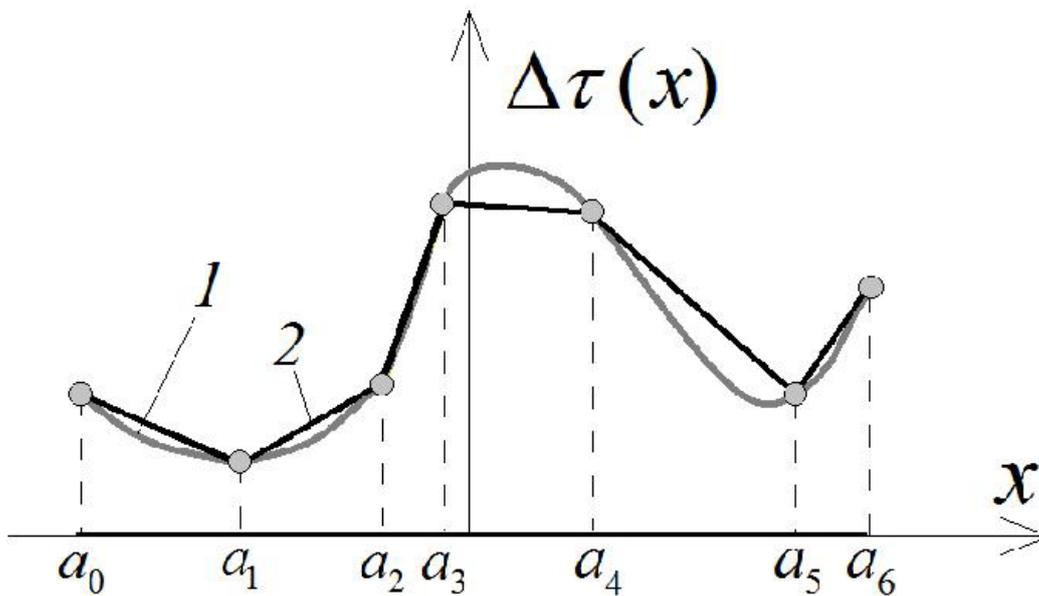
Для вычислений в качестве функции сброшенных касательных напряжений  $\Delta\tau(x)$  мы будем использовать ее непрерывное кусочно-линейное приближение, поскольку таким способом удобно приближать практически любую ограниченную непрерывную функцию. Это означает, что если нам известно (из измерений либо по предположению) значение  $\Delta\tau(x)$  в нескольких точках  $a_0, \dots, a_n$ , то в промежутках мы задаем ее непрерывно по линейному закону (рис. 4). Можно достигнуть любой желаемой точности приближения, уве-



**Рис. 2.** Примеры постоянной (сплошная линия) и линейной (пунктир) функций сброшенных касательных напряжений (а); соответствующие функции скачков смещений (б). Трещина активизируется на участке  $|x| \leq 1$ .



**Рис. 3.** Всестороннее давление вблизи трещины, активизировавшейся: *a* – с постоянным сброшенным касательным напряжением (сплошные графики на рис. 2); *б* – с линейным сброшенным касательным напряжением (пунктирные графики на рис. 2). Трещина активизируется на участке  $|x| \leq 1$ . Линия белого цвета определяет точки пространства, в которых давление сохранило значение, отвечающее начальному состоянию ( $\Delta p = 0$ ).



**Рис. 4.** Пример кусочно-линейного приближения функции  $\Delta\tau(x)$ . Здесь  $a_0, \dots, a_6$  – точки, в которых функция задана. 1 – приближаемая функция; 2 – приближение.

личивая количество заданных точек.

Более того, мы можем утверждать, что, равномерно увеличивая количество точек разбиения  $a_0, \dots, a_n$  (а значит, стремлении кусочно-линейного приближения к приближаемой функции), мы добьемся решения, сколь угодно

близкого к точному на всей плоскости, за исключением сколь угодно малой окрестности трещины. Ниже будут приведены соответствующие выкладки.

Итак, в качестве функции сброшенных касательных напряжений на трещине будем брать ее кусочно-линейное приближение, которое в

дальнейшем будем обозначать  $\Delta\tau(x)$ :

$$\Delta\tau(x) = \begin{cases} A_1x + B_1 & a_0 \leq x \leq a_1, \\ A_2x + B_2 & a_1 \leq x \leq a_2, \\ \vdots & \vdots \\ A_nx + B_n & a_{n-1} \leq x \leq a_n. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь крайние точки разбиения  $a_0 = -L$ ,  $a_n = L$  совпадают с концами трещины, значения  $\Delta\tau(a_i)$  заданы при  $i = 0, \dots, n$ , а коэффициенты  $A_i, B_i$  для  $i = 1, \dots, n$  определяются по формулам

$$A_i = \frac{\Delta\tau(a_i) - \Delta\tau(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}},$$

$$B_i = \Delta\tau(a_{i-1}) - \frac{\Delta\tau(a_i) - \Delta\tau(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \times a_{i-1}. \quad (12)$$

Точное решение уравнения (3) с правой частью вида (11) (Гахов, 1977) дает выражение для производной функции скачка смещений на трещине (ср. с выражением (4)):

$$g'(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{L^2 - x^2}} \left[ C + x \sum_{k=1}^n \left\{ A_k \left( \sqrt{L^2 - a_k^2} - \sqrt{L^2 - a_{k-1}^2} \right) - B_k \left( \arcsin \frac{a_k}{L} - \arcsin \frac{a_{k-1}}{L} \right) \right\} - \right. \\ \left. - x^2 \sum_{k=1}^n \left\{ A_k \left( \arcsin \frac{a_k}{L} - \arcsin \frac{a_{k-1}}{L} \right) - \right. \right. \quad (13) \\ \left. \left. - \sqrt{L^2 - x^2} \sum_{k=1}^n \left\{ (A_k x + B_k) \left[ \begin{aligned} &\ln|a_{k-1} - x| - \ln|a_k - x| + \\ &+ \ln \left| -a_{k-1}x + L^2 + \sqrt{(L^2 - x^2)(L^2 - a_{k-1}^2)} \right| - \\ &- \ln \left| -a_{k-1}x + L^2 + \sqrt{(L^2 - x^2)(L^2 - a_k^2)} \right| \end{aligned} \right] \right\} \right\} \right]$$

где постоянная  $C$  определяется из условия  $g(-L) = g(L)$  (оба эти значения нулевые, поскольку концы трещины закреплены).

Аналогично (Осокина, Фридман, 1987), по формулам (5) и (6) из выражения (13) для  $g'(x)$  найдем выражения для комплексных потенциалов Колосова-Мухелишвили:

$$\Phi(z) = \frac{i}{2\pi^2} \left[ C \frac{\pi}{\sqrt{z^2 - L^2}} + D \left( \frac{\pi z}{\sqrt{z^2 - L^2}} + \pi \right) + \right. \\ \left. + E \left( \frac{\pi z^2}{\sqrt{z^2 - L^2}} + \pi z \right) + \int_{-L}^L \frac{\Theta(r)}{r - z} dr \right], \quad (14)$$

$$\Psi(z) = \frac{i}{2\pi^2} \left[ C \left( \frac{\pi z^2}{(z^2 - L^2)^{3/2}} - \frac{2\pi}{\sqrt{z^2 - L^2}} \right) + D \left( \frac{\pi z^3}{(z^2 - L^2)^{3/2}} - \frac{3\pi z}{\sqrt{z^2 - L^2}} - 2\pi \right) + \right. \\ \left. + E \left( \frac{\pi z^4}{(z^2 - L^2)^{3/2}} - \frac{4\pi z^2}{\sqrt{z^2 - L^2}} - 3\pi z \right) + \int_{-L}^L \frac{(z - 2r)\Theta(r)}{(r - z)^2} dr \right], \quad (15)$$

где

$$D = A_k \left( \sqrt{L^2 - a_k^2} - \sqrt{L^2 - a_{k-1}^2} \right) - B_k \left( \arcsin \frac{a_k}{L} - \arcsin \frac{a_{k-1}}{L} \right), \quad (16)$$

$$E = A_k \left( \arcsin \frac{a_{k-1}}{L} - \arcsin \frac{a_k}{L} \right), \quad (17)$$

$$\Theta(r) = \sum_{k=1}^n \left( A_k r + B_k \right) \left[ \begin{aligned} &\ln|a_k - r| - \ln|a_{k-1} - r| + \\ &+ \ln \left| -a_{k-1}r + L^2 + \sqrt{(L^2 - r^2)(L^2 - a_{k-1}^2)} \right| - \\ &- \ln \left| -a_{k-1}r + L^2 + \sqrt{(L^2 - r^2)(L^2 - a_k^2)} \right| \end{aligned} \right]. \quad (18)$$

После этого точное решение задачи о напряженном состоянии для функции сброшенного напряжения вида (11) определяется по формулам (7), которые мы также можем переписать следующим образом:

$$\sigma_{xx}(z) = \operatorname{Re} \left( 2\Phi(z) - [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \right) + \sigma_{xx}^0(z),$$

$$\sigma_{yy}(z) = \operatorname{Re} \left( 2\Phi(z) + [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \right) + \sigma_{yy}^0(z), \quad (19)$$

$$\sigma_{xy}(z) = \operatorname{Im} \left[ \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) \right] + \sigma_{xy}^0(z).$$

**Стремление к нулю отклонения от точного решения.** Покажем, что при стремлении кусочно-линейного приближения  $\Delta\tau(x)$  к реальной функции сброшенных касательных напряжений  $\Delta\tilde{\tau}(x)$  разница между решением для  $\Delta\tilde{\tau}(x)$  и решением, полученным по методу, описанному в предыдущем разделе для функции  $\Delta\tau(x)$ , стремится к нулю практически всюду на плоскости.

Пусть  $g'(x)$  – производная функции скачка смещений,  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  – комплексные потенциалы решения для  $\Delta\tau(x)$ , а  $\tilde{g}'(x)$ ,  $\tilde{\Phi}(z)$  и  $\tilde{\Psi}(z)$  – производная функции скачка смещений и комплексные потенциалы, соответственно, для  $\Delta\tilde{\tau}(x)$ .

Фиксируем некоторое малое число  $\varepsilon > 0$ .

Пусть приближение  $\Delta\tau(x)$  в каждой точке трещины ( $-L \leq x \leq L$  в координатах, связанных с трещиной,  $L$  – полудлина трещины) отличается от  $\Delta\tilde{\tau}(x)$  не более, чем на  $\varepsilon$ :

$$|\Delta\tau(x) - \Delta\tilde{\tau}(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in [-L, L]. \quad (20)$$

Тогда, используя формулы для решения сингулярных интегральных уравнений (Гахов, 1977) и формулу (5), мы можем следующим образом преобразовать выражение для разницы между  $\Phi(z)$  и  $\tilde{\Phi}(z)$ :

$$\begin{aligned}
 |\Phi(z) - \tilde{\Phi}(z)| &= \left| -\frac{i}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{g'(r)}{r-z} dr - \left( -\frac{i}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{\tilde{g}'(r)}{r-z} dr \right) \right| = \\
 &= \left| -\frac{i}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{g'(r) - \tilde{g}'(r)}{r-z} dr \right| = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-L}^L \frac{1}{r-z} \left( \int_{-L}^L \frac{\sqrt{L^2-t^2} \tau(t)}{t-r} dt - \int_{-L}^L \frac{\sqrt{L^2-t^2} \tilde{\tau}(t)}{t-r} dt \right) dr \right| = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-L}^L \frac{1}{r-z} \left( \int_{-L}^L \frac{\sqrt{L^2-t^2} (\tau(t) - \tilde{\tau}(t))}{t-r} dt \right) dr \right| = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \iint_{\substack{-L < t < L \\ -L < r < L}} \frac{\sqrt{L^2-t^2} (\tau(t) - \tilde{\tau}(t))}{(r-z)(t-r)} dt dr \right| = \quad (21) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-L}^L (\tau(t) - \tilde{\tau}(t)) \sqrt{L^2-t^2} \left( \int_{-L}^L \frac{dr}{(r-z)(t-r)} \right) dt \right| = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-L}^L (\tau(t) - \tilde{\tau}(t)) \sqrt{L^2-t^2} \left( \frac{\ln \left| \frac{L-z}{t-L} \right| - \ln \left| \frac{-L-z}{t+L} \right|}{t-z} \right) dt \right| = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \ln \left| \frac{L-z}{-L-z} \right| \int_{-L}^L \frac{(\tau(t) - \tilde{\tau}(t)) \sqrt{L^2-t^2} \ln \left| \frac{t+L}{t-L} \right|}{t-z} dt \right|.
 \end{aligned}$$

Обозначим  $\delta$  – окрестность трещины буквой  $\Omega$ ,

$$\Omega = \{z = x + iy \mid |x| \leq L, |y| \leq \delta\} \cup \{z \mid |z-l| < \delta\} \cup \{z \mid |-z-l| < \delta\}.$$

Тогда, если  $z \notin \Omega$ , последнее выражение можно оценить явно:

$$\begin{aligned}
 |\Phi(z) - \tilde{\Phi}(z)| &\leq \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \ln \left| 1 - \frac{2L}{\delta} \right| \right| \int_{-L}^L \frac{|\tau(t) - \tilde{\tau}(t)| \sqrt{L^2-t^2} \ln \left| \frac{t+L}{t-L} \right|}{|t-z|} dt \leq \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \ln \left| 1 - \frac{2L}{\delta} \right| \right| \frac{L \cdot \varepsilon \cdot 2L}{\delta} = \quad (22) \\
 &= \varepsilon \frac{L^2}{\pi \delta} \left| \ln \left| 1 - \frac{2L}{\delta} \right| \right|.
 \end{aligned}$$

Это означает, что если мы выберем и фиксируем некоторое достаточно малое (для практических нужд) расстояние  $\delta$ , а также некоторое достаточно малое (отвечающее необходимой точности вычислений) число  $\tilde{\varepsilon}$ , то для  $z$ , лежащего вне  $\delta$ -окрестности трещины  $\Omega$ , при

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\frac{L^2}{\pi \delta} \left| \ln \left| 1 - \frac{2L}{\delta} \right| \right|} \quad (23)$$

найденный по кусочно-линейному приближению  $\Delta\tau(x)$  потенциал  $\Phi(z)$  будет отличаться

от точного решения (соответствующего  $\Delta\tilde{\tau}(x)$ ) не более чем на  $\tilde{\varepsilon}$ .

Для комплексного потенциала  $\Psi(z)$  можно привести аналогичные (только более объемные) выкладки, используя формулу (6). Их мы опустим, приведем только конечную оценку:

$$|\Psi(z) - \tilde{\Psi}(z)| \leq \varepsilon \frac{2L^3}{\pi \delta^2} \left( \frac{2(l+\delta)}{\delta} + \left| \ln \left| 1 - \frac{2L}{\delta} \right| \right| + 2 \right). \quad (24)$$

Нетрудно заметить, что в численном выражении эта оценка хуже, чем для  $\Phi(z)$ . Это означает, что для заведомо хорошего приближения понадобится лучшее изначальное кусочно-линейное приближение функции сброшенных начальных напряжений.

Таким образом, для любой сколь угодно малой окрестности трещины, взяв достаточно близкое к настоящей функции сброшенных касательных напряжений кусочно-линейное приближение, мы можем получить вне этой окрестности решение необходимой нам точности.

### ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

**Активизация трещины в поле начального гравитационного напряженного состояния.** Рассмотрим двумерную постановку задачи о плоской трещине в массиве, начальное напряженное состояние которого определяется действием только силы тяжести. Возьмем координатную ось  $OX$  горизонтальной, ось  $OZ$  – направленной вертикально вверх (рис. 5). Для того, чтобы иметь возможность не учитывать третью координату, будем считать массив и трещину бесконечными в направлении  $OY$  и однородными вдоль этой оси. В связи с этим в дальнейшем станем использовать «двумерную» терминологию: трещину будем обозначать отрезком на плоскости  $XOZ$  (рис. 5), а серединой и концами трещины называть соответственно середину и концы этого отрезка.

Заметим, что согласно схеме задачи рис. 5, трещина находится в упругой полуплоскости. В тоже время полученные ранее выражения относятся к трещине, расположенной в упругой плоскости. Их использование в случае рис. 5 возможно при допущении, что расстояние между верхним концом трещины и границей полуплоскости достаточно большое, порядка 1-2 длин трещины. Это условие связано с требованием выполнения равенства нулю напряжений на границе полуплоскости в конечном напряженном состоянии, после активизации трещины. Разумеется, окрестность трещины будет испыты-

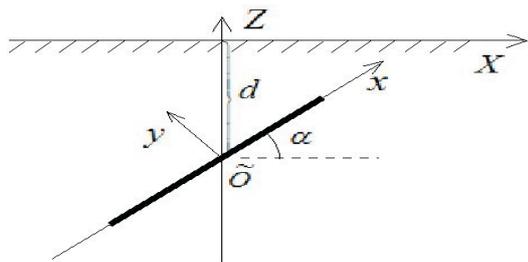


Рис. 5. Схема задачи для трещины в гравитационном поле напряжений. Жирной линией показана плоскость трещины.

вать влияние такой значительной (бесконечной) неоднородности, как граница полуплоскости, однако качественного изменения в картину напряжений это влияние, по нашему мнению, не внесет.

В качестве начала координат возьмем точку на дневной поверхности, расположенную над серединой трещины. В этом случае вертикальное сжатие массива, задаваемое силой тяжести, определяется по формуле

$$\sigma_{zz}^0 = \rho g Z, \quad (25)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $g$  – гравитационная постоянная. Если на массив не действуют никакие другие силы, то при чисто упругой реакции среды на нагружение (отсутствие пластических деформаций) горизонтальное сжатие при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0.25$  составляет 1/3 от вертикального (Динник, 1926; Ребецкий, 2008), то есть

$$\sigma_{xx}^0 = \frac{1}{3} \rho g Z. \quad (26)$$

Поскольку ось  $Z$  направлена вверх, то указанные напряжения отрицательные. Здесь, как это принято в классической механике, растягивающие напряжения положительны, а сжимающие отрицательны. В системе координат  $XOZ$  касательные напряжения начального напряженного состояния равны нулю ( $\sigma_{xz}^0 = 0$ ), что определяет вертикальные напряжения в качестве главных сжимающих ( $\sigma_3^0 = \sigma_{zz}^0$ ), а горизонтальные в качестве алгебраически максимальных ( $\sigma_1^0 = \sigma_{xx}^0$ ).

Для общности приложения к натурным данным будем проводить вычисления в безразмерных единицах. Половину длины трещины будем обозначать, как и раньше,  $L$ . Пусть середина трещины лежит на глубине  $d$ , а сама трещина наклонена под углом  $\alpha$  к горизонтали (рис. 5). При этом  $d$  выберем таким образом, чтобы трещина целиком находилась внутри массива

( $d > L \sin \alpha$ ).

Начальные нормальное  $N^0$  и касательное  $T^0$  напряжения в плоскости трещины в этом случае будут такими:

$$\begin{aligned} N^0 &= \frac{2}{3} \rho g Z + \frac{1}{3} \rho g Z \cos 2\alpha, \\ T^0 &= \frac{1}{3} \rho g Z \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $N^0$  и  $T^0$  отрицательны, поскольку мы считаем  $Z < 0$ .

При этом касательные напряжения  $T^0$  для всякого борта трещины будут направлены по погружению, что определяет кинематический тип трещины в виде сброса. Это достаточно очевидный результат, так как начальное напряженное состояние (25) и (26) отвечало геодинамическому режиму горизонтального растяжения.

Выберем новую систему координат  $x\tilde{O}y$ , связанную с трещиной: трещина лежит на оси  $\tilde{O}x$ ,

а начало координат  $\tilde{O}$  совпадает с ее серединой. Такая система координат использовалась в теоретическом разделе настоящей статьи. Переход между двумя системами координат осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha + (Z + d) \sin \alpha, \\ y &= -X \sin \alpha + (Z + d) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что в новых координатах  $N^0 = \sigma_{yy}^0$ ,  $T^0 = \sigma_{xy}^0$ . Поэтому, чтобы выяснить, активизируется ли трещина, подставим (27) в условие (1). Опуская промежуточные вычисления, получим, что неравенство (1) в рассматриваемом случае равносильно следующему:

$$k_s \leq \frac{|\sin 2\alpha|}{2 + \cos 2\alpha}. \quad (29)$$

Из (29) следует, что произойдет активизация трещины или нет, зависит не от глубины ее расположения, а только от угла наклона. Ниже мы подробно проанализируем это неравенство.

Пока просто предположим, что условие активизации (29) выполнено. Определим в новых координатах  $x\tilde{O}y$  функцию скачка смещений.

При  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  (то есть когда начальное касательное напряжение на трещине отрицательно) получим

следующее выражение для  $\Delta\tau(x)$ :

$$\Delta\tau(x) = \sigma_{xy}^0 - k_k \sigma_{yy}^0 = T^0 - k_k N^0 = \frac{1}{3} \rho g Y (\sin 2\alpha - 2k_k + k_k \cos 2\alpha) = \frac{1}{3} \rho g d (\sin 2\alpha - 2k_k + k_k \cos 2\alpha) \quad (30)$$

После преобразований получаем:

$$\Delta\tau(x) = \frac{1}{3} \rho g \sin \alpha (\sin 2\alpha - 2k_k + k_k \cos 2\alpha) x - \frac{1}{3} \rho g d (\sin 2\alpha - 2k_k + k_k \cos 2\alpha) \quad (31)$$

Если  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , то  $\sigma_{xy}^0$  положительно на трещине, и функция сброшенных напряжений будет такой:

$$\Delta\tau(x) = \frac{1}{3} \rho g \sin \alpha (\sin 2\alpha + 2k_k - k_k \cos 2\alpha) x - \frac{1}{3} \rho g d (\sin 2\alpha + 2k_k - k_k \cos 2\alpha) \quad (32)$$

Обратим внимание, что полученная функция сброшенных напряжений имеет вид (8), если положить

$$A = \frac{1}{3} \rho g \sin \alpha (\sin 2\alpha - 2k_k + k_k \cos 2\alpha), \\ B = -\frac{1}{3} \rho g d (\sin 2\alpha - 2k_k + k_k \cos 2\alpha) \quad (33)$$

при  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ , или

$$A = \frac{1}{3} \rho g \sin \alpha (\sin 2\alpha + 2k_k - k_k \cos 2\alpha), \\ B = -\frac{1}{3} \rho g d (\sin 2\alpha + 2k_k - k_k \cos 2\alpha) \quad (34)$$

при  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ .

Поэтому для получения в координатах  $xOy$  комплексных потенциалов  $\Phi$ ,  $\Psi$  можно использовать формулы (10). После этого изменение тензора напряжений  $\Delta\sigma_{xx}$ ,  $\Delta\sigma_{yy}$ ,  $\Delta\sigma_{xy}$  при активизации трещины найдем через очевидно вытекающие из формул (7) выражения

$$\Delta\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{yy} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\ \Delta\sigma_{yy} - \Delta\sigma_{xx} + 2i\Delta\sigma_{xy} = 2[\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]. \quad (35)$$

Чтобы перейти к начальным координатам  $XOZ$ , воспользуемся формулами перехода

(Мусхелишвили, 1966):

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) = \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \\ \Delta(\sigma_{zz} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xz}) = e^{-2i\alpha} \Delta(\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy}). \quad (36)$$

Таким образом, конечное напряженное состояние находится из (25), (26) и (36) по формулам

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^0 + \Delta\sigma_{xx}, \\ \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^0 + \Delta\sigma_{xz}, \\ \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0 + \Delta\sigma_{zz}. \quad (37)$$

Вслед за работами в теории прочности (Черепанов, 1974) вычислим коэффициент интенсивности напряжений у верхнего и нижнего кончика трещины:

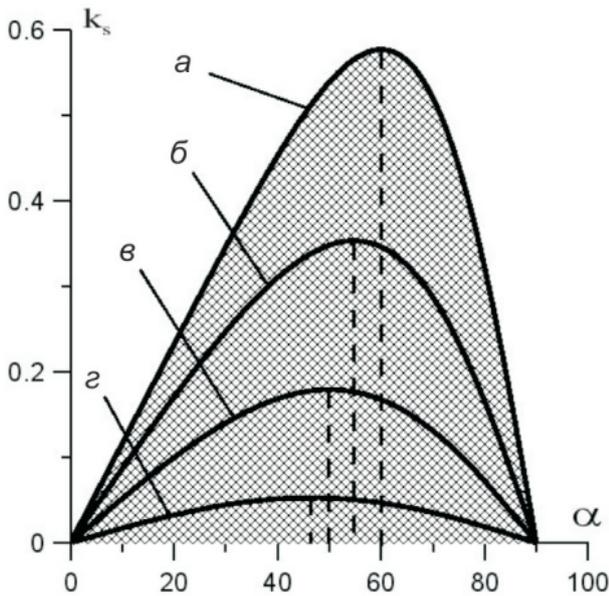
$$K_{II, \text{верхний}} = \frac{\sqrt{\pi L}}{3} \rho g (\sin 2\alpha - 2k_k + k_k \cos 2\alpha) \left( \frac{L \sin \alpha}{2} - d \right), \\ K_{II, \text{нижний}} = \frac{\sqrt{\pi L}}{3} \rho g (\sin 2\alpha - 2k_k + k_k \cos 2\alpha) \left( -\frac{L \sin \alpha}{2} - d \right). \quad (38)$$

Как следует из выражений (38), нижний кончик трещины находится в более благоприятном для развития состоянии, то есть здесь трещина может начать увеличивать свою длину. По-видимому, это означает, что сейсмические разрывы типа сбросов, развивающиеся в условиях гравитационного напряженного состояния, должны прежде всего удлинять свою протяженность в глубину, а затем, достигнув предела (на той глубине, где начальные напряжения перестают отвечать уравнениям (25), (26), т.е. там, где возникают необратимые пластические деформации см, например, (Ребецкий, 2008; Jaeger, 1962), могут развиваться вверх.

Вернемся теперь к исследованию неравенства (29). Это неравенство выражает зависимость максимального коэффициента поверхностного статического трения, при котором возможна активизация, от угла наклона трещины.

На рис. 6а показан график решения неравенства (29) при изменении угла  $\alpha$  от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  (при  $\alpha > 0^\circ$  график, очевидно, будет симметричным приведенному). На графике показано, что (то же можно показать и вычислениями), что максимум  $k_s$  достигается при  $\alpha = 60^\circ$ , значение этого максимума  $k_s \approx 0.577$  (точно  $k_s = \sqrt{3}/3$ ). Это означает, что если  $\alpha = 60^\circ$ , то трещина активизируется при  $k_s \leq 0.577$ , а при  $k_s > 0.577$  активизации не произойдет. Если, например,  $\alpha = 45^\circ$ , то максимальный коэффициент статического трения, при котором случится активизация, будет  $k_s = 0.5$ .

На рис. 6б-г показаны аналогичные графики для ситуации, когда массив находится за пределом катакластической текучести, то есть



**Рис. 6.** График зависимости максимального коэффициента поверхностного статического трения от угла наклона трещины: *a* – при коэффициенте бокового отпора  $q = 0.33$ , заштрихованная область ниже графика представляет собой решение неравенства (29); *б* – при коэффициенте бокового отпора  $q = 0.5$ ; *в* – при коэффициенте бокового отпора  $q = 0.7$ ; *г* – при коэффициенте бокового отпора  $q = 0.9$ . Пунктирными линиями показаны максимумы графиков.

не выполняется равенство (26), а имеет место соотношение  $\sigma_{xx}^0 = q\sigma_{zz}^0$  при значении коэффициента бокового отпора  $1/3 < q \leq 1$ . Подробно эти случаи мы здесь рассматривать не будем, чтобы избежать непомерного увеличения объема статьи. Можно, однако, видеть, что при увеличении коэффициента бокового отпора  $q$  уменьшается максимальное значение коэффициента трения  $k_s$ , при котором возможна активизация. Кроме того, максимум графиков  $k_s(\alpha)$  при  $q$ , стремящемся к 1, стремится к  $45^\circ$ .

Следует заметить, что в случае сухой трещины обычным является значение коэффициента трения 0.4-0.7 (Byerlee, 1978). При наличии флюидного давления в поровом пространстве пород необходим учет его влияния на прочность. Здесь возможен переход к эффективному коэффициенту трения (Погорелов и др., 2010), который в случае повышения уровня флюидного давления от нулевого до гидростатического снижается от указанных значений до 0.315, а при приближении флюидного давления к литостатическому значению падает до 0.05. В дальнейших расчетах значение коэффициента трения принималось равным нулю.

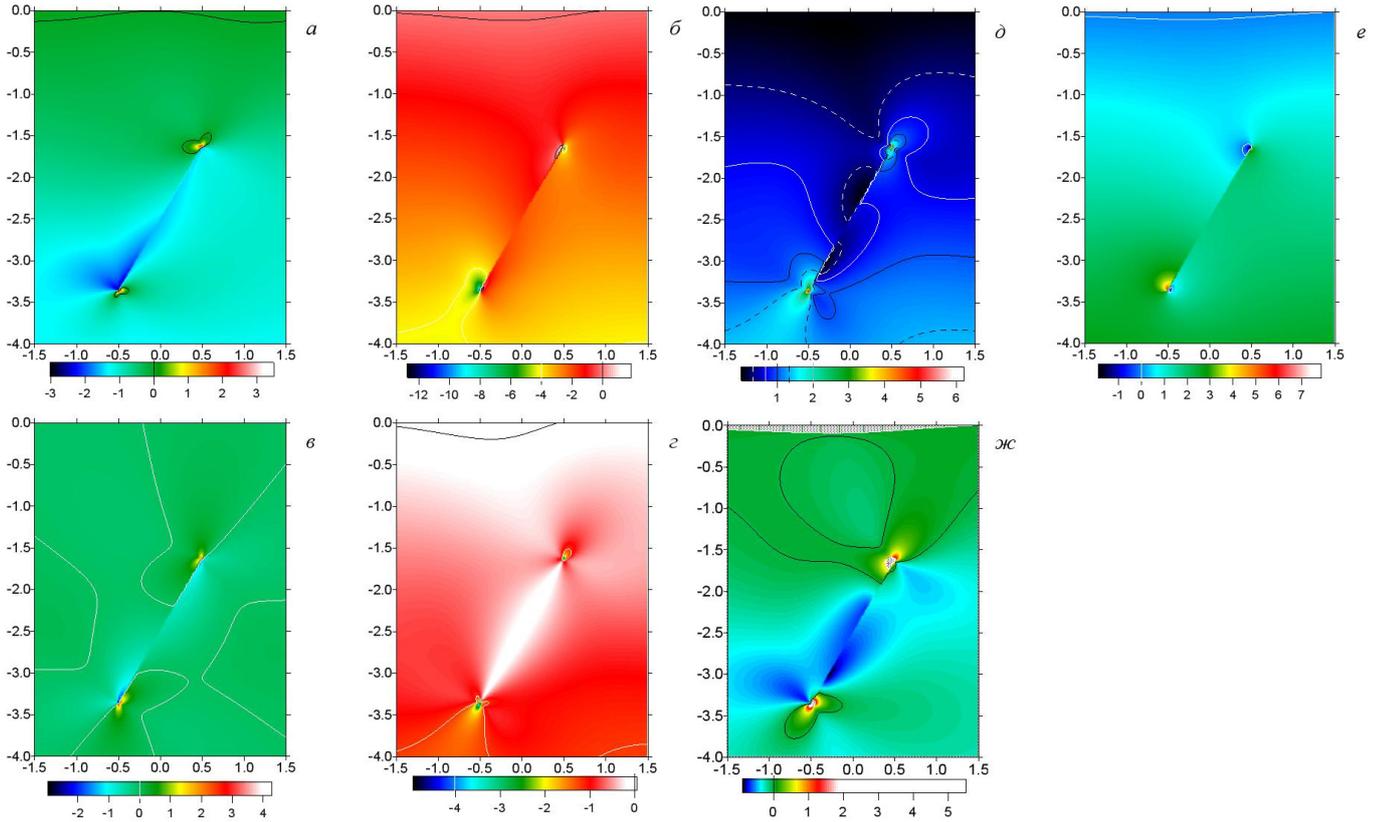
В качестве примера рассмотрим случай трещины, наклоненной под углом  $\alpha = 60^\circ$  к гори-

зонтали. Полудлину трещины примем равной  $L = 1$ , середина трещины находится на глубине  $d = 2.5$ . Заметим, что все параметры напряженного состояния в рассматриваемом случае линейно зависят от плотности  $\rho$  и от  $g$ . Поэтому без ограничения общности будем вычислять тензор  $\tilde{\sigma} = \sigma/\rho g$ , компоненты которого пропорциональны компонентам тензора напряжений.

На рис. 7 представлены поля компонент тензора  $\tilde{\sigma}$  при коэффициенте внутреннего трения, равном 0.6. Вблизи верхнего края полуплоскости черная (рис. 7а, 7б, 7г, 7ж) или белая линия (рис. 7е) показывает нулевые значения каждого из отображаемых параметров. Как мы отмечали в начале этого раздела, приложение полученных в первом разделе выражений для задачи о трещине в полуплоскости доставляет приближенное решение. Величина отклонения пунктирной линии от верхней плоской границы массива фактически характеризует точность нашего приближения, в котором использованы функции Мухелишвили, отвечающие задаче для бесконечной плоскости.

Обращают на себя внимание локальные области всестороннего растяжения (рис. 7а, 7б, 7е) вблизи концов трещины, что определяет возможность появления здесь пустот и зон повышенной дилатансии. Как следует из приведенных данных, вблизи заглубленного конца трещины в висячем ее крыле значения  $\tau$  и  $p$  повышенные, а в лежачем пониженные относительно исходного уровня (первые четыре изолинии на рис. 7д со значениями  $\tau_{\max} = 1/3, 2/3, 1, 4/3$  отвечают начальным значениям  $\tau_{\max}$  на глубинах  $Y = -1, -2, -3, -4$  соответственно). На рис. 7ж показано поле кулоновских напряжений  $\tau_c = \tau - k_c \sigma$ , коэффициент внутреннего трения мы берем  $k_c = 0.6$ . Видно, что наибольшие значения  $\tau_c$  принимает над верхним и под нижним кончиками трещины. На самом деле (на рисунке это плохо видно) при приближении к нижнему кончику трещины кулоновское напряжение растет быстрее, чем при приближении к верхнему кончику. Это тоже (как и коэффициенты интенсивности напряжений (38)) говорит в пользу того, что прорасти начнет скорее нижний конец трещины.

**Пример приложения метода для кусочно-линейной функции сброшенных касательных напряжений.** Чтобы проиллюстрировать полученные в настоящей работе формулы для произвольной функции сброшенных касательных напряжений, рассмотрим сначала примеры

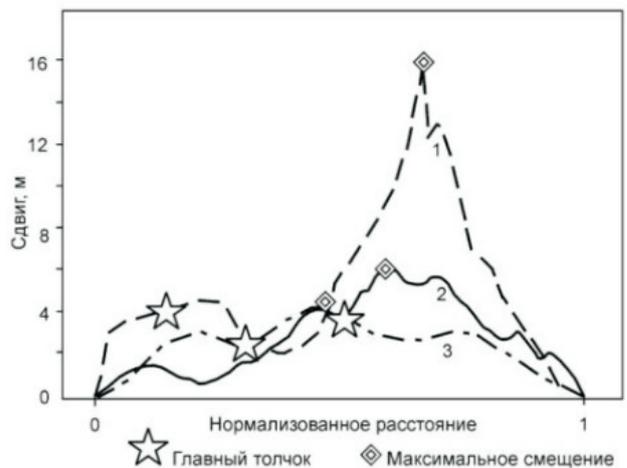


**Рис. 7.** Параметры напряженного состояния при  $\alpha = 60^\circ$ : *a* – нормальное напряжение  $\tilde{\sigma}_{xx}$ ; *b* – нормальное напряжение  $\tilde{\sigma}_{zz}$ ; *c* – касательное напряжение  $\tilde{\sigma}_{xz}$ ; *г* – касательное напряжение  $\tilde{\tau}_{xy}$  (в плоскости трещины); *д* – максимальное касательное напряжение  $\tilde{\tau}_{max}$ ; *e* – всестороннее (двумерное) давление  $\tilde{p}$ ; *ж* – кулоново напряжение  $\tilde{\tau}_C$  (точками заштрихованы области, где давление  $\tilde{p} < 0$ ). Сплошными или пунктирными линиями выделены некоторые изолинии, их значения показаны на шкалах соответствующих параметров.

функций скачков смещений, измеренные на реальных разрывах. На рис. 8, взятом из работы (Шерман, Горбунова, 2008), показано расположение главных очагов землетрясений и максимальных амплитуд горизонтальных смещений по простиранию активных разломов (Kim, Choi, 2007).

Методом подбора мы нашли такую функцию сброшенных касательных напряжений  $\Delta\tau(x)$  (то есть подобрали коэффициенты  $A_i, B_i$  при  $i = 1, \dots, n$  и значения  $a_i$  при  $i = 0, \dots, n$  в формуле (11)), что график полученной из формулы (13) функцией скачка смещений  $g(x)$  будет похожим на график номер 1 с рисунка 8 (рис. 9).

Подчеркнем, что функция, показанная на рис. 9а, не является непосредственным решением обратной задачи для первого графика смещений на рис. 8. Мы просто приводим пример такого соотношения начальных напряжений на трещине, при котором смещение может иметь подобный вид. Решение обратной задачи, как правило, не



**Рис. 8.** Расположение главных очагов землетрясений и максимальных амплитуд горизонтальных смещений по простиранию активных разломов (Kim, Choi, 2007), цитируется по работе (Шерман, Горбунова, 2008): 1 – Куньлунь (2001 г,  $M_w = 7.8$ ); 2 – Маньчжурский (1997 г,  $M_w = 7.6$ ); 3 – Дзюндже (1999 г,  $M_w = 7.2$ )

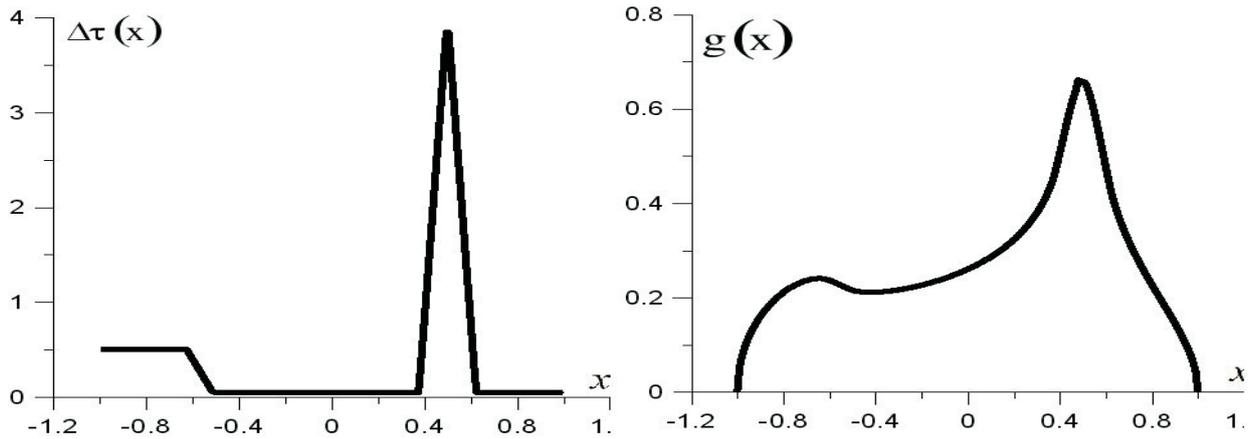


Рис. 9. Подобранная функция сброшенного касательного напряжения  $\Delta\tau(x)$  (а); построенная по ней функция скачка смещений  $g(x)$  (ср. с графиком смещений номер 1 (Куньлунь) на рис. 8) (б).

единственно. Кроме того, как уже отмечалось выше, мы никак не учитываем динамику смещений на разрыве, которая, вообще говоря, может влиять на конечный результат.

Сброшенные касательные напряжения на трещине больше либо равны нулю (рис. 9а), поэтому происходит правый сдвиг. На рис. 10 показаны рассчитанные по формулам (14)-(19) изменения параметров напряженного состояния в окрестности трещины, возникшие за счет ее активизации со смещением таким, как на рис. 9б. Белые изолинии показывают нулевое изменение соответствующих значений.

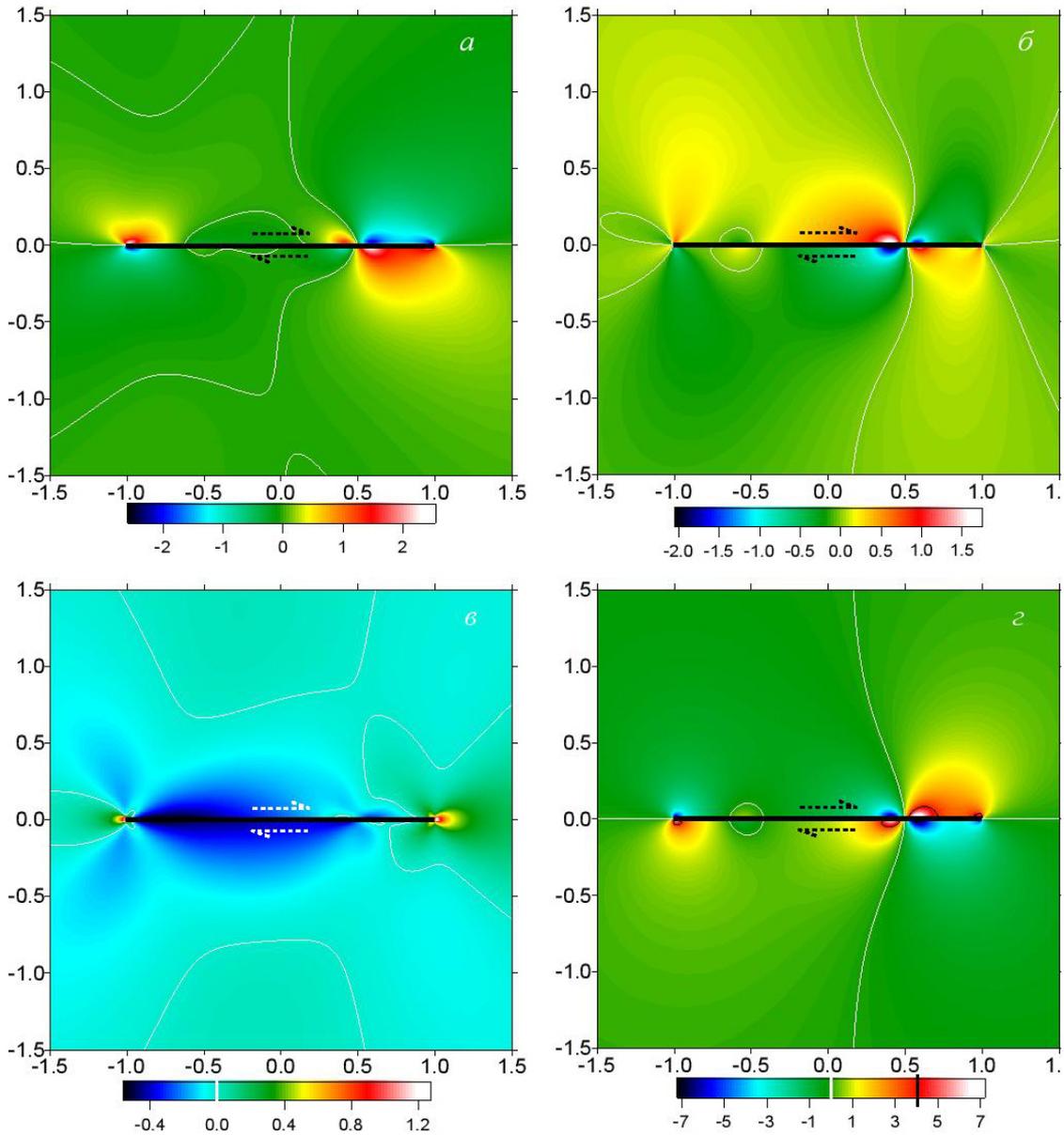
Если бы мы знали начальное напряженное состояние, то, просуммировав его с рассчитанным изменением, получили бы конечное распределение напряжений. Восстановить начальное напряженное состояние однозначно по имеющимся данным невозможно. Сопоставляя функцию сброшенных касательных напряжений, показанную на рис. 9а с формулами (2), можно увидеть, что оно должно иметь довольно сложный вид.

Остановимся подробнее на рис. 10г, где изображено изменение всестороннего давления  $\Delta p$ . Более темными показаны зоны уменьшения сжатия (мы не можем говорить о растяжении, поскольку речь идет лишь об изменении давления, о  $\Delta p$ ), более светлыми — зоны его возрастания. Эти зоны разделены белой изолинией, соответствующей нулевому изменению всестороннего давления. Если проследить знак  $\Delta p$  вдоль берегов трещины, легко увидеть, что точки смены знака  $\Delta p$  на берегах совпадают с точками минимумов и максимумов функции скачка смещений (рис. 9б). Так, на левом конце трещины функция скачка смещений возрастает, и на дальнем от нас берегу в этом месте происходит разгрузка.

Двигаясь по дальнему берегу трещины вправо, встречаем небольшой участок убывания смещения, и ровно там наблюдается маленькая зона увеличения сжатия. Еще правее функция скачка смещений начинает медленно возрастать (это зона незначительной разгрузки), потом возрастает быстрее, (что соответствует более интенсивной разгрузке). Правый конец дальнего берега трещины, где смещение быстро убывает, — зона интенсивного сжатия. По черной изолинии (ее значение показано на шкале) можно увидеть, что оно максимально вблизи тех участков трещины, где функция скачка смещений убывает наиболее стремительно. На ближнем берегу трещины смещение в каждой точке такое же по величине, как на дальнем, но в противоположную сторону. Поэтому картина чередования зон сжатия и разгрузки на ближнем берегу повторяет описанную с точностью до наоборот.

Из наблюдений, описанных в предыдущем абзаце, можно сделать следующий вывод: *изменения интенсивности сжатия концентрируются в тех местах, где выше скорость изменения величины смещений* (то есть модуль производной функции скачка смещений). Говоря простым языком, это отражение того факта, что если из двух соседних точек одна испытала заметно большее смещение, чем другая, то напряжения на участке между ними сильно изменились, а вот если эти точки сместились почти одинаково, то изменения напряжений между ними почти не будет, независимо от величины смещения.

**Последовательная активизация двух трещин.** В завершение проиллюстрируем расчет смещений бортов трещины в неоднородном поле напряжений на примере двух последовательно активизировавшихся трещин (рис. 11а). Пусть первой активизируется более длинная, коор-



**Рис. 10.** Изменения параметров напряженного состояния, соответствующие смещению бортов трещины, показанному на рисунке 12: *а* – нормального напряжения  $\Delta\sigma_{xx}$ ; *б* – нормального напряжения  $\Delta\sigma_{yy}$ ; *в* – касательного напряжения  $\Delta\sigma_{xy}$ ; *г* – всестороннего давления  $\Delta p$ . Трещины обозначены жирными чёрными линиями. Стрелки показывают направление сдвига. Белые изолинии показывают нулевой уровень изменения соответствующего параметра.

динаты концов которой соответственно  $x = 0, y = -0.4$  и  $x = 8, y = -0.4$ . Второй активизируется более короткая трещина, расположенная чуть выше левого конца первой. Координаты ее концов, соответственно,  $x = -1, y = 0$  и  $x = 1, y = 0$ . Трещины параллельны, и их длины соотносятся как 4/1. Пусть начальное поле напряжений однородно и определяется главными начальными напряжениями  $\sigma_1^0 = 0$  и  $\sigma_2^0 = -2$ , заданными на бесконечности. Главное напряжение  $\sigma_2^0$  дей-

ствует под углом  $15^\circ$  к плоскостям трещин. В этом случае активизация второй трещины произойдет уже в неоднородном поле напряжений.

По формулам (2)-(7) рассчитаем напряженное состояние после активизации первой трещины. После этого расчета мы уже знаем касательные  $\sigma_{xy}$  и нормальные  $\sigma_{yy}$  напряжения в каждой точке второй (пока не активизировавшейся) трещины. По формуле (2) определим точную функцию сброшенных касательных напряжений на второй трещине (рис. 12б). На рис. 12в показано

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВА

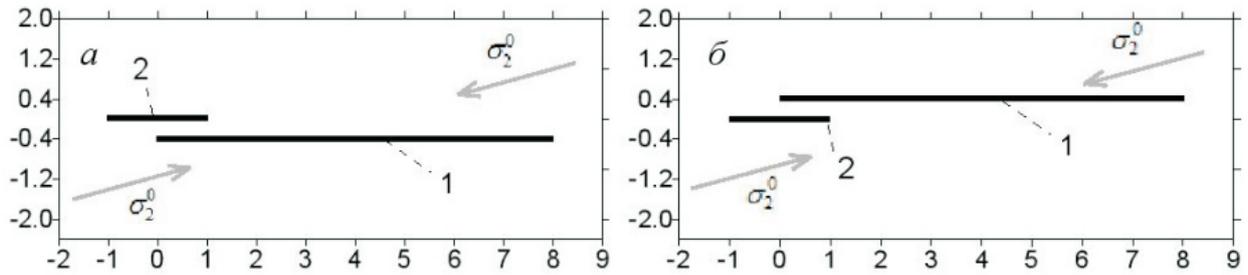


Рис. 11. Схемы задачи для первого (а) и второго (б) случаев двух последовательно активизировавшихся трещин. Цифрами 1 и 2 показана очерёдность активизации.  $\sigma_2^0$  – максимальное начальное сжатие.

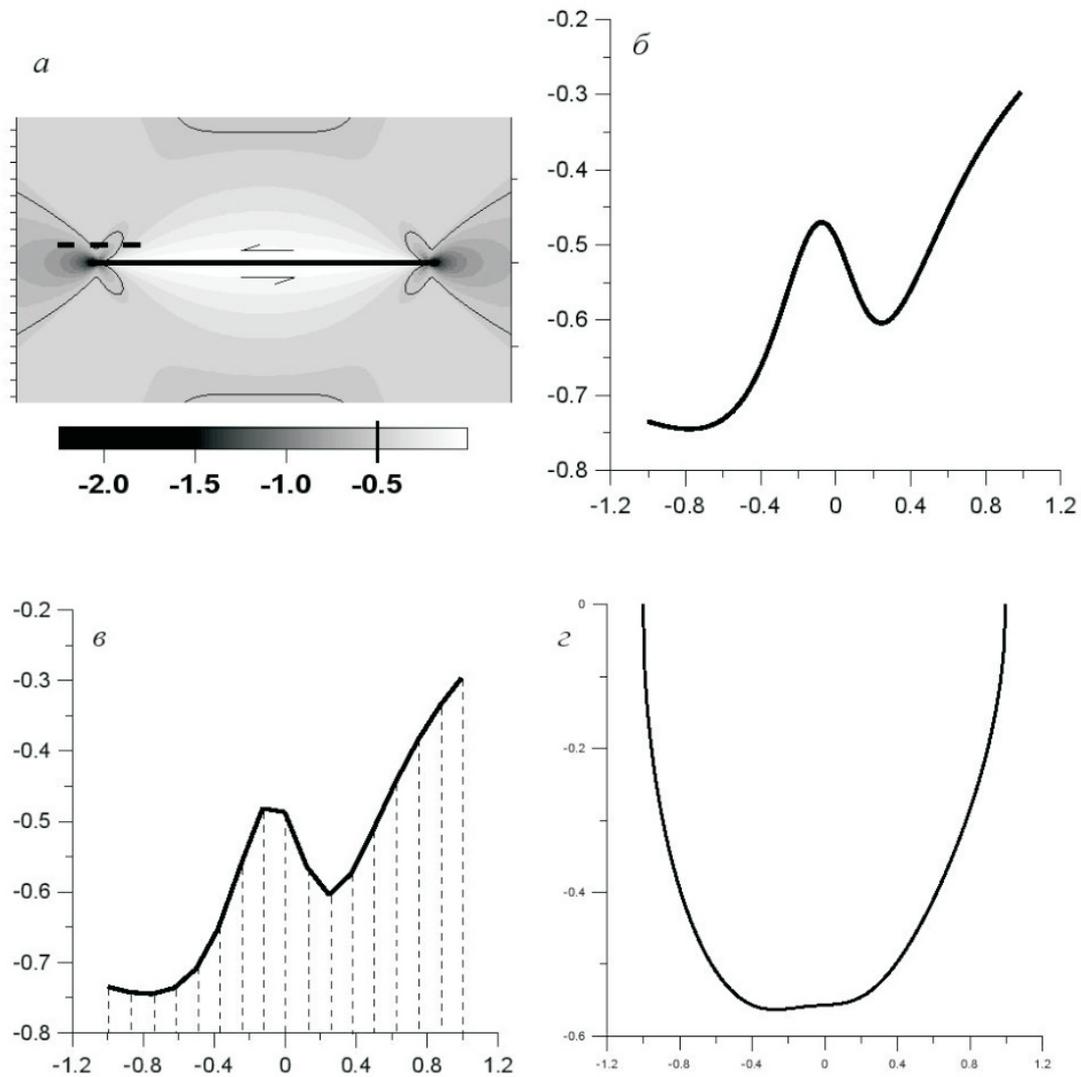


Рис. 12. Касательное напряжение  $\sigma_{xy}$  после активизации первой трещины: а – в окрестности первой трещины (жирной линией показана первая трещина, пунктиром обозначено место, на котором возникнет вторая трещина), стрелки показывают направление сдвига, чёрные изолинии соответствуют начальному значению касательного напряжения  $\sigma_{xy}$ ; б – функция сброшенных касательных напряжений на второй трещине, рассчитанная с шагом 0.01 в соответствии с точным решением; в – кусочно-линейное приближение функции сброшенных касательных напряжений на второй трещине (длина трещины поделена на 16 равных отрезков длины 0.125); г – функция скачка смещений, найденная по приближению функции сброшенных касательных напряжений

кусочно-линейное приближение этой функции, которое мы используем для дальнейших расчетов, а на рис. 12  $z$  – функция скачка смещений, определенная по формуле (13).

На рис. 13 представлены рассчитанные по формулам (14)-(19) параметры напряженного состояния. Показана окрестность второй (короткой) трещины, как наиболее информативная область, поскольку картина за ее пределами мало отличается от имеющей место в случае активизации одной только первой трещины (Осокина, Фридман, 1987; Лермонтова, Ребецкий, 2012).

Поскольку обе трещины испытывают левый сдвиг, то зоны повышенного сжатия выше левого конца длинной трещины и ниже правого конца короткой сливаются. Видно, что в этой области сильно повышено нормальное напряжение  $\sigma_{xx}$  (рис. 13а), напряжение  $\sigma_{yy}$  (рис. 13б) также увеличено, таким образом, между трещинами возросло как максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$  (рис. 13г), так и всестороннее давление  $p$  (рис. 13д).

По рисункам 12а-б можно увидеть, что после активизации длинной трещины левый конец короткой трещины находится в зоне повышенных касательных напряжений, а правый, наоборот, в разгруженной от касательных напряжений области. В связи с этим интенсивность изменения напряжений заметно выше на левом конце трещины, чем на правом (рис. 13в). Здесь играет роль также то, что изменения возле левого конца второй трещины накладываются на уже повышенные касательные напряжения, а возле правого – на пониженные после активизации первой трещины.

Интересно сравнить с только что описанной задачей симметричный случай, когда вторая (короткая) трещина расположена ниже конца длинной (рис. 11б). Можно сделать некоторые выводы о связи конечного напряженного состояния с расположением трещин относительно осей начального сжатия. Поскольку сдвиг левый, ниже левого конца первой трещины возникнет разгруженная область. Из-за того, что при расчетах мы берем нулевой коэффициент кинематического трения, а поле касательных напряжений после активизации первой трещины симметрично, сброшенные напряжения на второй трещине будут такими же, как и в предыдущем случае (рис. 12а). Поэтому функция сброшенных напряжений, ее приближение и функция скачка смещений во втором случае будут в точности такими же, как и в первом, они изображены на рисунках 12б-г. Параметры напряженного состояния показаны на рис. 14.

Можно видеть, что картина касательного напряжения  $\sigma_{xy}$  (рис. 14в) является зеркальной копией рис. 13в, то есть при параллельном расположении трещин касательное напряжение в соответствующем направлении не зависит от того, с какой именно стороны от первой находится вторая трещина.

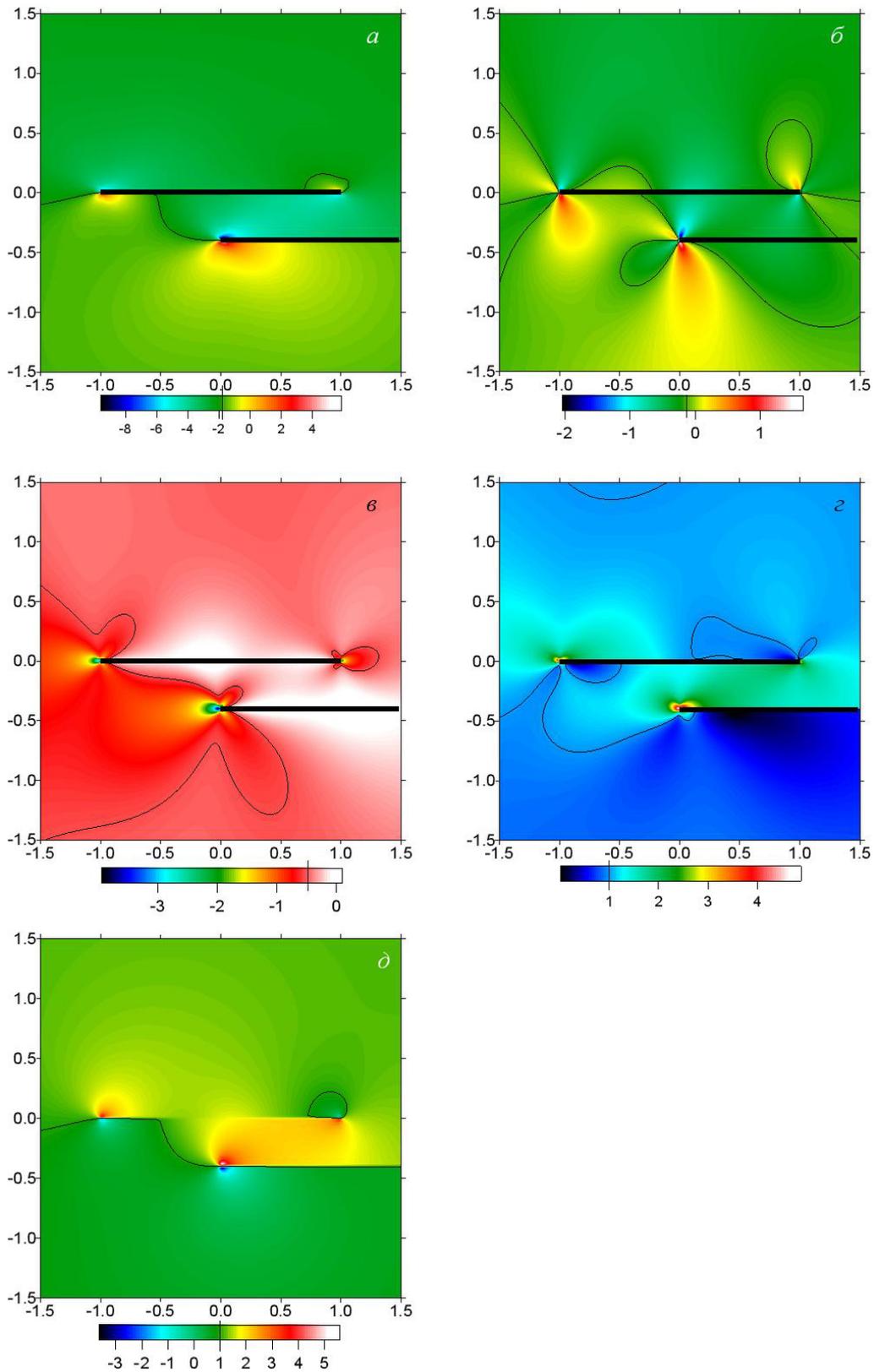
Если для двух вариантов расположения трещин сравнить между собой нормальные напряжения  $\sigma_{xx}$  (рис. 13а, 14а) и  $\sigma_{yy}$  (рис. 13б, 14б), а также всестороннее давление  $p$  (рис. 13в, 14в), то окажется, что для каждого из этих параметров картинка во втором случае является перевернутым негативом первого. В тех зонах, где в первом случае наблюдается увеличение сжатия, во втором случае (с учетом зеркальной симметрии расположения трещин) сжатие уменьшается, и наоборот.

На рисунке 14г показано максимальное касательное напряжение во втором случае. Какая-либо симметрия первому случаю отсутствует. Области повышенного максимального касательного напряжения около левых концов обеих трещин образуют обширную зону слияния. На участке между трещинами напряжение  $\tau_{\max}$  пониженное, как и везде под короткой трещиной, за исключением маленького участка возле правого кончика. Отметим, что в этих же областях действует и пониженное всестороннее давление (рис. 14д). Таким образом, эта область может сохранять потенциал для активизации трещин меньшего масштабного уровня.

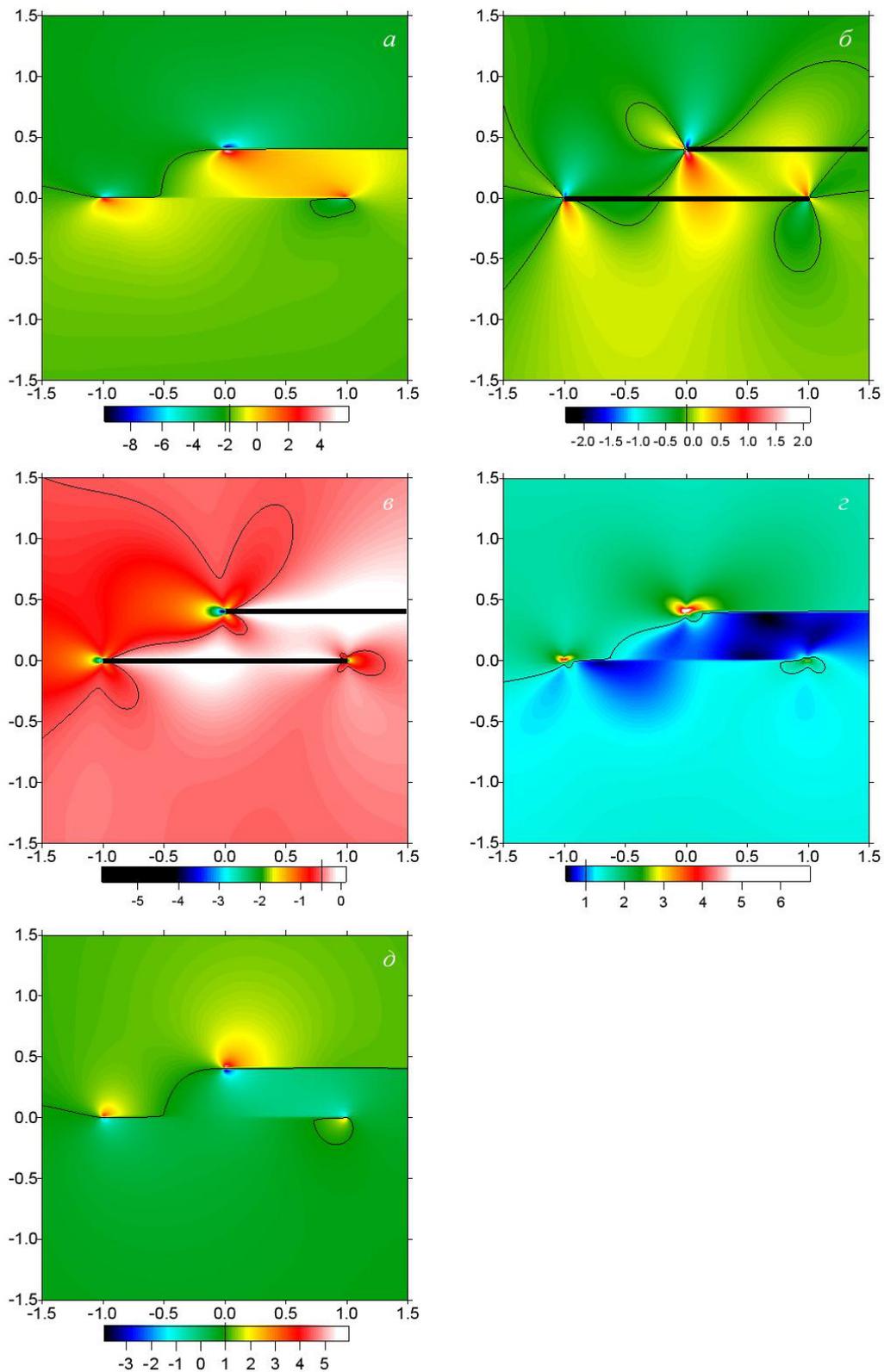
## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненные исследования являются продолжением работ известного тектонофизика Дарианы Николаевны Осокиной, которая изучала закономерности распределения напряжений в окрестности одиночного сдвигового разрыва. В своих исследованиях (Осокина, 1987а, 1987б; 1989) она опиралась на полученное В.Н. Фридманом (Осокина, Фридман, 1987) решение двумерной задачи упругости для однородного начального напряженного состояния. Обработка различных полевых измерений показывает, что распределение реальных природных напряжений далеко от однородного (Ребецкий, 2007а; Ребецкий, Маринин, 2006). В настоящей работе построено решение задачи для трещины в более общем случае начального напряженного состояния, в подавляющем большинстве случаев имеющее место в природе. Также найденное решение позволяет по распределению вдоль плоскости разрыва амплитуд смещений

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВА



**Рис. 13.** Параметры напряженного состояния для двух последовательно активизировавшихся трещин: *a* – нормальное напряжение  $\sigma_{xx}$ ; *б* – нормальное напряжение  $\sigma_{yy}$ ; *в* – касательное напряжение  $\sigma_{xy}$ ; *г* – максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$ ; *д* – всестороннее (двумерное) давление  $p$ . Рисунки приведены для левого конца большой трещины, которая активизировалась первой. Жирными линиями обозначены трещины (кроме тех случаев, когда их расположение очевидно определяется по скачку параметра), изолинии показывают начальные значения соответствующих параметров.



**Рис. 14.** Параметры напряженного состояния для второго варианта взаимного расположения двух последовательно активизировавшихся трещин: *a* – нормальное напряжение  $\sigma_{xx}$ ; *б* – нормальное напряжение  $\sigma_{yy}$ ; *в* – касательное напряжение  $\sigma_{xy}$ ; *г* – максимальное касательное напряжение  $\tau_{\max}$ ; *д* – всестороннее (двумерное) давление  $p$ . Рисунки приведены для левого конца большой трещины, которая активизировалась первой. Жирными линиями обозначены трещины (кроме тех случаев, когда их расположение очевидно определяется по скачку параметра), изолинии показывают начальные значения соответствующих параметров.

рассчитать возмущенную компоненту тензора напряжений.

Необходимо также отметить, что из результатов работы следует возможность решения обратной задачи, когда по распределению вдоль плоскости разрыва амплитуд смещений можно произвести оценку сброшенных напряжений.

Приложение найденных решений к частным задачам дало ряд интересных результатов. Так, для задачи о трещине, расположенной в массиве под действием чистого гравитационного напряженного состояния, показано, что на возможность ее активизации влияет не глубина расположения трещины, а угол наклона ее плоскости. Каждому его значению отвечает свое предельное значение коэффициента поверхностного трения покоя, при котором берега трещины испытают сдвиговые смещения. Если трещина находится на том глубинном уровне, где напряженное состояние определяется чисто упругой реакцией среды на массовые силы, то предельное значение этого коэффициента трения для данного угла наклона наибольшее. По мере увеличения коэффициента бокового отпора предельное значение коэффициента трения, отвечающего возможности активизации трещины снижается.

Из решения этой же задачи для трещины в гравитационном напряженном состоянии следует, что возможность ее прорастания определяется прежде всего нижним концом трещины, где как коэффициенты интенсивности напряжений, так и кулоновы напряжения имеют наибольшие значения. Полученное решение позволяет выявить участки в окрестности трещины, благоприятствующие повышению коллекторских свойств горных пород. Установлено, что в лежачем крыле формируется область растягивающих напряжений (всестороннее давление отрицательное), которая должна определять возможность возникновения здесь микро- и макро-отрывов. В работе (Тимурзиев, 2009) прогнозировалась подобная возможность при анализе мест повышенного дебита нефти для месторождений Западной Сибири.

Отметим также важность полученного результата в задаче для трещины с переменными по знаку градиентами смещений ее бортов (рис. 9). Показано, что положение точки смены знака изменения всестороннего давления ( $\Delta p$ ) возмущенного напряженного состояния вдоль берегов трещины совпадает с точками минимумов и максимумов функции скачка смещений (рис. 10). Этот результат позволяет давать прогноз изменения природных напряжений по данным о характере смещений бортов разрыва.

Работа выполнена при частичной поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры

инновационной России» ГК № 14.740.11.1535, шифр заявки «2012-1.3.1-12-000-1007-005».

*Список литературы*

- Борняков С.А., Шерман С.И.* Многоуровневая самоорганизация деструктивного процесса в сдвиговой зоне (по результатам физического моделирования) // *Физическая мезомеханика*. 2000. Т. 3. № 4. С. 107-115.
- Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
- Динник А.Н.* О давлении горных пород и расчете крепи круглой шахты // *Инженерный работник*. 1926. № 3. С. 1-12.
- Кожурин А.И., Стрельцов М.И.* Сейсмотектонические проявления землетрясения 27(28) мая 1995 г. на севере Сахалина // *Федеральная система сейсмологических наблюдений и прогноза землетрясений. Нефтегорское землетрясение 27(28).05.1995 г. Специальный выпуск*. М.: 1995. 236 с.
- Костров Б.В.* Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: Гос. изд-во техн.-теор. литературы, 1954. 795 с.
- Лермонтова А.С., Ребецкий Ю.Л.* Исследование взаимодействия трещин сдвига на основе приближенного аналитического решения задачи теории упругости // *Геодинамика и тектонофизика*. 2012. Т. 3. № 3. С. 239-274.
- Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- Осокина Д.Н.* Взаимосвязь смещений по разрывам с тектоническими полями напряжений и некоторые вопросы разрушения горного массива // *Поля напряжений и деформаций в земной коре*. М.: Наука, 1987а. С. 120-135.
- Осокина Д.Н.* Об иерархических свойствах тектонического поля напряжений // *Поля напряжений и деформаций в земной коре*. М.: Наука, 1987б. С. 136-151.
- Осокина Д.Н.* Моделирование тектонических полей напряжений, обусловленных разрывами и неоднородностями в земной коре // *Экспериментальная тектоника. Методы, результаты, перспективы*. М.: Наука. 1989. С. 163-196.
- Осокина Д.Н., Фридман В.Н.* Исследование закономерностей строения поля напряжений в окрестностях сдвигового разрыва с трением между берегами // *Поля напряжений и деформаций в земной коре*. М.: Наука, 1987. С. 74-119.
- Осокина Д.Н., Цветкова Н.Ю.* Изучение локального поля напряжений и прогноз вторичных нарушений в окрестностях тектонических

- разрывов и в очагах землетрясений с учетом третьего главного напряжения // Поля напряжений и деформаций в литосфере. М.: Наука, 1979. С. 163-184.
- Погорелов В.В., Конешов В.Н., Ребецкий Ю.Л.* Численное моделирование напряжений западного фланга зондской субдукционной области // Вестник КРАУНЦ. Науки о земле. 2010 № 1. Вып.5. С. 174-192.
- Ребецкий Ю.Л.* Тектонические напряжения и прочность природных массивов. М.: ИКЦ «Академкнига». 2007а. 406 с.
- Ребецкий Ю.Л.* Напряженное состояние, благоприятное для крупномасштабного хрупкого разрушения горных пород // Доклады РАН. 2007б. Т. 416. № 5. С. 106-109.
- Ребецкий Ю.Л.* Механизм генерации тектонических напряжений в областях больших вертикальных движений землетрясений // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 1. № 11. С. 66-73.
- Ребецкий Ю.Л., Лермонтова А.С.* Аналитическое решение задачи для совокупности трещин сдвига с кулоновым трением // ДАН. 2010. Т. 435. № 6. С. 821-825.
- Ребецкий Ю.Л., Маринин А.В.* Поле тектонических напряжений до Суматра-Андаманского землетрясения 26.12.2004. Модель метастабильного состояния горных пород // Геология и геофизика. 2006. № 47. С. 1192-1206.
- Саньков В.А., Семинский К.Ж.* Анализ смещений по разрывам в зоне формирующегося трансформного разлома // Изв. вузов. Геология и разведка. 1988. № 4. С. 10-18.
- Семинский К.Ж.* Внутренняя структура континентальных разломных зон. Новосибирск: СО РАН фил. Гео, 2003. 242 с.
- Тимурзиев А.И.* Новейшая сдвиговая тектоника осадочных бассейнов: тектонофизический и флюидодинамический аспекты (в связи с нефтегазоносностью) // Дисс. докт. геол.-мин. наук. Москва, 2009. 330 с.
- Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- Шерман С.И., Гинтов О.Б., Борняков С.А. и др.* Характер разрывообразования в консолидированной земной коре и моделирование зон скалывания // Геофизический журнал. 1988. Т. 10. № 1. С. 13-20.
- Шерман С.И., Горбунова Е.А.* Волновая природа активизации разломов Центральной Азии на базе сейсмического мониторинга // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. № 1. С. 115-122.
- Ammon C.J., Ji C., Thio H.-K. et al.* Rupture process of the 2004 Sumatra-Andaman Earthquake // Science. 2005. V. 308. P. 1133-1139.
- Byerlee J. D.* Friction of Rocks // Pure and applied geophysics. 1978. V. 116. P. 615-626.
- Chinnery M.A.* The deformation of the ground around surface fault // Bul. Seism. Soc. Am. 1961. V. 51. № 3. P. 355-372.
- Cho J., Jin K., Enkhbayar D., Bayasgala A., Kim Y.* Fault segmentation and slip distribution along the 1957 Gobi-Altay earthquake rupture, Mongolia // American Geophysical Union, Fall Meeting 2009. Abstract #T33B-1910.
- Jaeger J.C.* Elasticity, Fracture and Flow with Engineering and Geological Applications. London: Methuen&Co. LTD, 1962. 208 p.
- Kim Y.-S., Choi J.-H.* Fault propagation, displacement and damage zones // Conference Commemorating the 1957 Gobi-Altay Earthquake. Ulaanbaatar, Mongolia. 2007. P. 81-86.
- Lay T., Kanomory H., Ammon C.J. et al.* The great Sumatra-Andaman earthquake of 26 December 2004 // Science. 2005. V. 308. P. 1127-1133.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВА  
**STRESS FIELD OF A MASSIF WITH A SHEAR FRACTURE IN A  
NON-HOMOGENEOUS INITIAL STRESS CONDITIONS**

**A.S. Lermontova**

*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences,  
Gruzinskaya str., 10-1, Moscow, 123995, Russia*

According to different field measurements, a fault sides displacement in real rock massifs usually occurs in non-homogeneous stress conditions. We solve a problem of two-dimensional elasticity theory on a single shear fracture in a non-homogeneous initial stress field. We give formulas for the shear jump function and final stress field parameters in a neighborhood of the fracture for arbitrary initial conditions, which may vary along the fracture. In order to illustrate the method, we compute the stress fields for different initial stressed states. The stress field components are shown for a subvertical fracture, where the initial compression increases with depth due to the gravity. The proposed method allows us to compute the shear jump function for horizontal surface faults if the initial stress field is known, and to compute the contribution of activation of the fault to the final stress field if we know the fault sides displacement. Besides, the article provides an example of using our method for finding the stress field of a massive, which contains a set of arbitrarily located and sequentially activated fractures.

*Keywords: stress field, elasticity, fracture, stress drop, shear jump.*