РАЗДЕЛ IV. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОФЛЮИДНЫХ СИСТЕМ (ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС, ГЕОМЕХАНИКА, ХИМИЧЕСКИЙ ТРАНСПОРТ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ)

CHAPTER IV. MODELING OF GEOFLUID SYSTEMS (HEAT AND MASS TRANSFER, GEOMECHANICS, CHEMICAL TRANSPORT AND INTERACTIONS)

УДК 532.546

Реология пористых сред с пористым скелетом переменной массы

М.Г. Храмченков

НИЦ «Курчатовский Институт», Москва, 123182, Россия
mkhramch@gmail.com

Построены реологические соотношения для деформируемых пористых сред с пористым скелетом переменной массы. На основе полученных соотношений дано объяснение эффектов, возникающих при решении задач геомеханики для горных пород в ходе процессов, сопровождающихся изменением их массы.

Rheology of Porous Media with a Porous Skeleton of Variable Mass

Maxim G. Khramchenkov

NRC «Kurchatov Institut», Moscow, Russia

Rheological relationships are constructed for deformable porous media with a porous skeleton of variable mass. Based on these relationships, an explanation is given for the effects that arise when solving geomechanical problems for rocks during processes accompanied by changes in their mass.

Введение

Одним из этапов (часто завершающим) изучения закономерностей тепломассопереноса и трансформации вещества в ходе сложных геологических процессов (преобразование горных пород в ходе процессов метаморфизма, преобразования вмещающих горных пород при интрузиях магмы, изменение состава вмещающих горных пород под действием горячих газов (пневматолитовые процессы) или растворов (гидротермальные процессы)) является математическое моделирование. Математическая модель представляет собой систему уравнений (как правило, дифференциальных), описывающих весь комплекс сопутствующих явлений, как правило, на базе концепций механики сплошной среды. Безусловно, математическая модель, претендующая на хотя бы достаточную полноту описания всего комплекса вышеперечисленных процессов, должна быть исключительно сложной в силу сложности и взаимосвязанности кристаллохимических, минералогических, физических и химических сопутствующих явлений. В силу этого естественной реакцией специалистов по моделированию является стремление к редукции, т.е. упрощению описания, выражающемуся в сокращении числа уравнений и констант, подлежащих экспериментальному определению. Редукционизм имеет в этом случае обоюдоострый характер. С одной стороны, он позволяет быстрее достичь цели моделирования, с другой – может быть недопустимо тривиальным. Нет нужды говорить, что те процессы, которые были обозначены выше, для своего корректного отражения должны существенным образом требовать включения в состав соответствующей модели деформации горных пород и их взаимосвязь с возникающими в горной породе напряжениями. Такая взаимосвязь изучается особой наукой, составной частью механики сплошной среды, – реологией. Особую

сложность реологические соотношения приобретают в случае протекания явлений в горных породах, как правило, пористых. Задача, которая была решена в рамках данной работы, может быть сформулирована следующим образом: необходимо получить корректные реологические соотношения для пористых сред с пористым скелетом переменной массы за счет процессов массообмена, протекающих в горных породах. Необходимо заметить, что автор уже пытался разработать модель, соответствующую заявленной цели, но именно в части подходящей реологии разработать ранее такую модель все-таки исчерпывающим образом не удалось [1, 2]. Полного анализа данной проблемы нет и других исследованиях на эту тему, из которых отметим работы [3, 4]. В этой работе будет использован другой подход, основы которого были заложены профессором А.В. Костериным в [5].

Основные соотношения геомеханики пористых сред с пористым скелетом переменной массы

Введем следующие обозначения: G – внешняя нагрузка; M_s – масса вещества пористого скелета; p – давление в жидкости; Us – внутренняя энергия скелета; Ss – энтропия твердой фазы; δQ(e) – внешний поток тепла; δQ′≥0 – некомпенсированноетепло; δA(i) – элементарная работа внутренних поверхностных сил; N_s – количество молей вещества твердой фазы; V_0 – объем представительного элемента пористой среды; V_s – объем твердой фазы в составе представительного элемента объема; v_s – молярный объем вещества твердой фазы; ui – компоненты вектора скорости перемещения частиц скелета; i_{ij}^s – девиатор σ_{ij}^s; $\dot{V}_s$ – скорость изменения объема твердой фазы; eij – тензор скоростей деформаций; θ – дилатация; ρ_w – плотность водной фазы; ρ_s – плотность твердой фазы; σ_{ij}^f – тензор эффективных напряжений; $\sigma = -(1/3)\sigma_{ii}^s$ – давление в твердой фазе; μ_s – химический потенциал вещества твердой фазы; λ, μ, ν – упругие постоянные; нижний индекс «s» означает твердую фазу (solid); нижний индекс «w» означает воду (water).

Теперь дадим определения дилатации среды, представительного объема (ПЭО) и массы ПЭО

$$\theta = (V - V_0)/V_0 \tag{1}$$

$$V = V_0 \exp\theta . \tag{2}$$

$$M_s = (1-m)\rho_s V_0 \exp\theta . \tag{3}$$

Продифференцируем последнее уравнение по времени и преобразуем результат к виду:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{(1-m)}{\rho_s}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (1-m)\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{(1-m)}{M_s}\frac{\partial M_s}{\partial t} . \tag{4}$$

Запишем теперь условия механического равновесия. Предположим, что к глине приложена внешняя нагрузка *G*. Тогда распределение нагрузки между компонентами среды запишется в виде

$$G_{ij} = (1-m)\sigma_{ij} - mp\delta_{ij}$$

который, после обозначения $(1-m)(\sigma_{ij} + p\delta_{ij}) = \sigma_{ij}^f$ переходит в соотношение Терцаги

$$G_{ij} = \sigma_{ij}^f - p\delta_{ij}. \tag{5}$$

Здесь p – давление в жидкости, физический смысл введения σ_{ij}^f будет раскрыт ниже.

Реологические соотношения для пористых сред с переменной массой скелета

Перейдем к термодинамическому равновесию. Выразим свободную энергию твердой фазы через макропараметры σ^f, m, θ. Для этого запишем первый и второй закон термодинамики для твердой фазы переменной массы:

$$\mathrm{d}U_s = \delta Q^{(e)} + \delta A^{(i)} + \mu_s dN_s, \quad T\,\mathrm{d}S_s = \delta Q^{(e)} + \delta Q'. \tag{6}$$

В изотермических условиях

$$\delta A^{(i)} = \mathrm{d}U_s - \delta Q^{(e)} - \mu_s dN_s = \mathrm{d}U_s - T\,\mathrm{d}S_s + \delta Q' - \mu_s dN_s =$$
$$= \mathrm{d}F_s - \mu_s dN_s + \delta Q'$$

Тогда в условиях отсутствия массовых сил имеем

$$\frac{\delta A^{(i)}}{\mathrm{dt}} = \dot{F}_s - (\mu_s / v_s)\dot{V}_s + \frac{\delta Q'}{\mathrm{dt}} = \int\limits_{V_s} \sigma_{ij}^s \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{dV} = \int\limits_{V_s} \frac{\partial \sigma_{ij}^s u_i}{\partial x_i}\mathrm{dV}, \tag{7}$$

Преобразуем объемный интеграл в последнем соотношении в поверхностный:

$$\frac{\delta A^{(i)}}{\mathrm{dt}} = \int\limits_{\sum_s} \sigma_{ij}^s n_j u_i\,\mathrm{ds} = \int\limits_{S_e^s} i_{ij}^s n_j u_i\,\mathrm{ds} + \int\limits_{S_e^s} (-\sigma + p)u_i n_i\,\mathrm{ds} + \int\limits_{S_e^s} -pu_i n_i\,\mathrm{ds} + \int\limits_{S_{s-w}} -pu_i n_i\,\mathrm{ds} =$$
$$= \int\limits_{S_e^s} i_{ij}^s n_j u_i\,\mathrm{ds} + \int\limits_{S_e^s} (-\sigma + p)u_i n_i\,\mathrm{ds} - \int\limits_{\sum_s} pu_i n_i\,\mathrm{ds}$$

Переходя к средним по представительному объему, получим

$$\frac{\delta A^{(i)}}{\mathrm{dt}} = \int\limits_{V_0} \frac{\partial(\sigma_{ij}^f \langle u_i\rangle)}{\partial x_i}\mathrm{dV}_0 + (-p)\int\limits_{\sum_s} u_i n_i\,\mathrm{d}s, \tag{8}$$

Здесь

$$\sigma_{ij}^f = (1-m)(\langle i_{ij}^s\rangle - \langle\sigma - p\rangle\delta_{ij})$$

есть тензор эффективных напряжений. Очевидно, что

$$\int\limits_{\sum_s} u_i n_i\,\mathrm{dS} = \dot{V}_s$$

Здесь $\dot{V}_s$ – скорость изменения объема твердой фазы. Тогда из условия $\rho_s V_s = M_s$ получаем

$$\dot{\rho}_s V_s + \rho_s \dot{V}_s = \dot{M}_s \Rightarrow \dot{V}_s = -\dot{\rho}_s V_s / \rho_s + \dot{M}_s / \rho_s \tag{9}$$

Из соотношения (4) следует:

$$\dot{M}_s / \rho_s = V_0[-\dot{m} + (1-m)\dot{\rho}_s / \rho_s + (1-m)\dot{\theta}].$$

$$\dot{V}_s = -\dot{\rho}_s V_s / \rho_s + \dot{M}_s / \rho_s = V_0[-\dot{m} + (1-m)\dot{\theta}]$$

Отсюда следует

$$(-p)\int\limits_{\sum_s} u_i n_i \,\mathrm{d}s = -pV_0[-\dot{m}+(1-m)\dot{\theta}].$$

Тогда для скорости изменения свободной энергии получаем

$$\frac{1}{V_0}(\dot{F}_s-(\mu_s/\nu_s)\dot{V}_s+\frac{\delta Q'}{\mathrm{dt}}) = \sigma_{ij}^f e_{ij} - p[-\dot{m}+(1-m)\dot{\theta}],$$

где e_{ij} – тензор скоростей деформаций. Рассмотрим упругий скелет, т. е. случай $\delta Q'/dt=0$:

$$\dot{F}_s/V_0 = T_{ij}e'_{ij} - \sigma^f\dot{\theta}+[(\mu_s/\nu_s)-p][-\dot{m}+(1-m)\dot{\theta}]. \qquad (10)$$

Здесь e_{ij}' – девиатор тензора скоростей деформаций. Будем считать, что текущий объем пор/трещин в трансформирующейся горной породе составляет лишь малую часть общего объема, т.е. $V \approx V_s$, тогда из уравнения (4) приближенно получаем $\partial m/\partial t = (1-m_0)\partial\theta/\partial t$ и член $[-\dot{m}+(1-m)\dot{\theta}]$ можно записать в виде $(m_0-m)\dot{\theta}$. С другой стороны, для свободной энергии имеем зависимость $F_s = F(J_2',\theta)$, где J_2' – второй инвариант тензора деформаций, следовательно, $\dot{F}_s = (\partial F/\partial J_2')\varepsilon'_{ij}e'_{ij}+(\partial F/\partial\theta)\dot{\theta}$. Сравнивая правые части уравнений для свободной энергии, получим

$$T_{ij} = 2\frac{\partial F}{\partial J_2'}\varepsilon'_{ij}, -\sigma^f+[(\mu_s/\nu_s)-p](m_0-m) = \frac{\partial F}{\partial\theta}. \qquad (11)$$

Если задаться конкретным видом F для упругой твердой среды [6]

$$F = \frac{\lambda}{2}\theta^2+\mu J_2'-\nu\theta\sqrt{J_2'},$$

где λ, μ, ν = const, то после простых вычислений получаем

$$-\sigma^f+[(\mu_s/\nu_s)-p](m_0-m) = \lambda\theta-\upsilon\sqrt{J_2'}, \quad T_{ij} = (2\mu-\frac{\nu\theta}{\sqrt{J_2'}})\varepsilon'_{ij}. \qquad (12)$$

Полученные уравнения играют роль реологических соотношений, позволяющих получить замкнутую систему уравнений для физико-химической механик природных пористых сред в ходе процесса изменения массы горных пород. Физический смысл полученных соотношений заключается в следующем. Соотношение Терцаги (5) жестко фиксирует величину эффективных напряжений, поскольку давление p в жидкости может быть обусловлено различными причинами, часто не связанными с дилатацией/усадкой массива горных пород. Но при изменении массы скелета идет процесс формирования новой пористости и, следовательно, дополнительной дилатации. Формирование новой дилатации должно приводить к появлению дополнительных эффективных напряжений, что и реализует член $[(\mu_s/\nu_s)-p](m_0-m)$.

Работа выполнена в рамках Государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

Список литературы

1. *Khramchenkov E.* Modeling of non-equilibrium mass-exchange processes in geo-systems / *E. Khramchenkov, M. Khramchenkov* // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2016. 86. pp. 1–4.

2. *Khramchenkov M.* A new approach to obtain rheological relations for saturated porous media / *Khramchenkov M., Khramchenkov E.* // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. 72. 2014. pp. 49–53.

3. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика / М.: Недра. 1996.

4. *Charlez Ph. A.* Rock Mechanics. V. 1. Editions Technip. 1991.

5. *Костерин А.В.* Основные уравнения и вариационные методы расчета изотермической фильтрации / *А.В. Костерин*: Дис. … докт.физ.-мат.наук. Казань. 1988. 159 с.

6. *Ляховский В.А.* О поведении упругой среды с микронарушениями / *В.А. Ляховский, В.П. Мясников* // Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.